

УДК 517.544

Об интегральном уравнении некоторых краевых задач для гармонических функций в плоских многосвязных областях с нерегулярной границей

Михайлов С. Е.

§ 1. Введение

Пусть D — конечная или бесконечная область с границей Γ , являющейся совокупностью простых замкнутых контуров ограниченного вращения без точек заострения: $\Gamma = \bigcup_{i=0}^m \Gamma_i$, контур Γ_0 охватывает все остальные контуры Γ_i , он может и отсутствовать, тогда область D бесконечна.

Двумерные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в областях с нерегулярной границей довольно хорошо изучены [1]—[3]. Задача Дирихле безусловно и однозначно разрешима в классе гармонических в D и непрерывных в $\bar{D}$ функций, если заданные граничные значения искомой функции непрерывны. Задача Неймана однозначно с точностью до произвольной аддитивной постоянной разрешима в классе гармонических в D функций, имеющих на границе заданный краевой поток, который является регулярной счетно-аддитивной функцией множеств на Γ , если этот поток по всему контуру Γ равен нулю [2]—[3].

С другой стороны [4], решения эллиптических краевых задач, в частности, для уравнения Лапласа, в областях с угловыми точками могут иметь производные, обладающие степенными особенностями в угловой точке, даже если заданные граничные условия достаточно гладкие. Упомянутые производные, вернее коэффициенты при степенной особенности, часто представляют основной интерес для приложений, в частности, для теории упругости (см., например, [5], [6]).

Эффективным методом решения краевых задач является сведение их к граничным интегральным уравнениям и затем численное решение последних. При этом в зависимости от интегрального представления решения исходной задачи плотность уравнения может быть порядка самого решения (т. е. ограничена), либо порядка производных решения (т. е. имеет степенную особенность) в окрестности угловой точки. В первом случае довольно трудно с достаточной точностью получить коэффициент при растущих производных. Во втором — для эффективного решения интегрального уравнения и получения коэффициента при особенности необходимо явным образом выделять сингулярный характер искомой плотности в угловых точках контура, чему препятствует недостаточная изученность самого уравнения и, следовательно, гладкости его решения. Поэтому, насколько известно автору, второй способ для задач в областях с нерегулярной границей должным образом не применялся.

В данной работе решение задачи Дирихле ищется в виде нетрадиционного интегрального представления через угловой потенциал, а за-

дачи с косо́й производной — в виде обобщенного логарифмического потенциала. Это позволяет свести обе задачи к одному интегральному уравнению по контуру Γ с плотностью порядка производных решения исходной задачи, ядро уравнения при этом имеет сильные стационарные особенности в угловых точках. Такого рода уравнения рассматривались в [7], [8]. Далее выписывается формула для радиуса Фредгольма полученного уравнения и исследуется его разрешимость и единственность в случае конечной или бесконечной многосвязной области D . Для случая, когда уравнение лежит на спектре, вводится возмущающий оператор, снимающий уравнения со спектра и приводящий к уравнению, решение которого совпадает с одним из решений исходного. Изучаются спектральные свойства возмущенного уравнения и предлагается возмущающий оператор некоторого частного вида, приводящий к уравнению, решение которого разложимо в сходящийся ряд Неймана при любой правой части.

§ 2. Сведение к интегральному уравнению

Пусть s — длина дуги контура Γ , ориентированного так, чтобы при обходе в положительном направлении область D оставалась слева. Рассматривается задача Дирихле $u|_{\Gamma} = f_1(s) \in W_{r,1}(\Gamma)$ и задача с косо́й производной $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{\Gamma} = f_2(s) \in L_r(\Gamma)$, $1 < r < \infty$, причем в точках гладкости Γ

единичный вектор $\vec{l}$ составляет постоянный угол, отличный от нуля и 2π , с касательной к контуру. Пусть $z = x + iy$ — комплексная координата точки плоскости, $t = t(s)$ — комплексная координата точки контура Γ , $k(s) = \frac{dt}{ds} \equiv e^{i\varphi(s)}$, φ — угол между касательной к контуру и осью Ox , $k_l(s) = \frac{dz}{dl(s)} \Big|_{\Gamma} \equiv k(s)\beta$, β — комплексная константа, $|\beta| = 1$, $\text{Im } \beta < 0$.

В дальнейшем не будут различаться функции от аргументов t и s , т. е. $f(t) = f(t(s)) = f(s)$.

Решение задачи Дирихле ищется в виде

$$u(x, y) = \text{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \left[\Phi(z_1) + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{z_1 + a_i} \right] dz_1 \right\} + A_0, \quad (2.1)$$

решение задачи с косо́й производной — в виде

$$u(x, y) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{\beta} \int_{z_0}^z \Phi(z_1) dz_1 \right\} + C. \quad (2.2)$$

Здесь z_0 — произвольная фиксированная точка в D ; a_i , $i = 1, \dots, m$, — произвольные фиксированные точки внутри контуров Γ_i ; A_i , $i = 0, \dots, m$, — действительные постоянные, способ определения которых будет указан в § 4, C — произвольная постоянная.

Аналитическую функцию $\Phi(z)$ будем искать в классах Смирнова E_p , $p > 1$, [3] и потребуем, чтобы $\Phi(\infty) = 0$, если область D включает точку $z = \infty$. Тогда после подстановки в граничные условия (и дифференцирования их по s в задаче Дирихле) получаем для $\Phi(z)$ задачу Римана — Гильберта

$$\text{Re}[k(t)\Phi^+(t)] = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad f(t) \in L_r, \quad 1 < r, \quad (2.3)$$

где $f(t) = \frac{df_1(s)}{ds} - \operatorname{Re} \sum_{i=1}^m \frac{k(s) A_i}{t(s) - a_i}$ для задачи Дирихле и $f(t) = f_2(t)$ для задачи с косо́й производной. Любое решение задачи (2.3) в E_p при $p > 1$ порождает по формулам (2.1) — (2.2) решение исходных задач в классе $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ (при надлежащем подборе констант A_i в задаче Дирихле), если получаемая при этом функция u однозначна, а также ограничена на бесконечности для бесконечной области D . Поскольку решения исходных задач Дирихле и Неймана (как частный случай задачи с косо́й производной) заведомо существуют для описываемых граничных условий [2], [3], а выбор их в виде (2.1) — (2.2) может только сузить класс допустимых в качестве решения функций, то для того, чтобы не пропустить решения, будем рассматривать $\Phi(z) \in E_p$ с возможно меньшим $p > 1$.

Решение задачи (2.3), в свою очередь, ищется в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(s) ds}{t(s) - z}. \quad (2.4)$$

Здесь действительная функция $\mu \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, тогда $\Phi(z) \in E_p(D)$.

Если подставить (2.4) в (2.2), то получаем представление решения задачи с косо́й производной, практически совпадающее с обобщенным логарифмическим потенциалом, введенным С. А. Габовым [9], и с обычным потенциалом простого слоя, если $\beta = -i$, и задача с косо́й производной переходит в задачу Неймана. Подстановка (2.4) в (2.1) показывает, что (2.1), (2.4) — по сути дела интегральное представление решения задачи Дирихле с плотностью μ и ядром, являющимся интегралом по контуру от потенциала двойного слоя, т. е. просто углом, под которым виден пройденный отрезок пути интегрирования из точки (x, y) , с добавкой некоторых логарифмических членов (в случае многосвязной области) и аддитивной константы. Это представление можно также выразить через угловой потенциал, используемый в [9] для односвязных областей с гладкой границей. В [10] исследована гладкость углового потенциала в области, ограниченной кривой ограниченного вращения.

Подставляя (2.4) в (2.3), приходим к интегральному уравнению относительно $\mu(s)$ ($\lambda = 1$):

$$(I - \lambda K)\mu = f,$$

$$(K\mu)(s_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(s) \operatorname{Im} \left[\frac{k(s_0)}{t - t_0} \right] ds, \quad \mu(s) \in L_p, \quad t = t(s), \quad t_0 = t(s_0). \quad (2.5)$$

Сопреженным к (2.5) будет уравнение

$$(I - \lambda K^*)v = f^*,$$

$$(K^*v)(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} v(s) \operatorname{Im} \left[\frac{k(s)}{t - t_0} \right] ds, \quad v(s) \in L_q(\Gamma), \quad q = \frac{p}{p-1}. \quad (2.6)$$

При $\lambda = 1$ уравнение (2.5) совпадает с уравнением, соответствующим задаче Неймана для области D , а при $\lambda = -1$ — для области, внешней по отношению к D , если искать ее решение в виде потенциала простого слоя с плотностью $\mu(s)$. Уравнение (2.6) при $\lambda = -1$ совпадает с уравнением, соответствующим задаче Дирихле для области D , а при $\lambda = 1$ — для области, внешней по отношению к D , если искать ее решение в виде

потенциала двойного слоя с плотностью $v(s)$. Отметим, что в нашей постановке как для конечных, так и для бесконечных областей $\lambda=1$, однако функция $k(s)$ в случае односвязной области при переходе к внешней задаче меняет знак, так как меняется направление положительного обхода.

Ядра уравнений (2.5), (2.6) ограничены, если $s \neq s_0$, а на диагонали в точках ляпуновской гладкости имеют не более чем интегрируемую особенность. Когда s и s_0 стремятся к одной угловой точке с разных сторон, ядро имеет сильную особенность. Уравнения такого типа рассматривались Я. Б. Лопатинским [7] в пространстве $L_1(\Gamma)$ со степенным весом на простом замкнутом кусочно-гладком контуре и В. Ю. Шелеповым [8] в пространствах L_p , $1 < p < \infty$, на простом контуре ограниченного вращения без точек заострения. В этих работах получены формулы для индекса уравнения, которые, как легко видеть из рассуждений [7], остаются верными и для конечной совокупности простых замкнутых не пересекающихся контуров ограниченного вращения.

В [8] также приведен радиус Фредгольма оператора K^* в пространстве $L_q(\Gamma)$, $1 < q < \infty$, и он равен $\Omega^*(q) = \min_k \frac{\sin(\pi/q)}{|\sin(\pi - \omega_k/q)|}$. Минимум

берется по всем угловым точкам, ω_k — величина внутреннего угла. В [2] исследовано уравнение (2.5), в котором μds заменено на dM , в пространстве функций M , являющихся абсолютно аддитивными функциями множеств на Γ , и уравнение (2.6) — в пространстве непрерывных функций, на простом контуре ограниченного вращения без точек заострения. Радиус Фредгольма операторов K и K^* , соответственно, в этих пространствах равен $\Omega(\infty) = \min_k \frac{\pi}{|\pi - \omega_k|} > \Omega^*(q)$. Поскольку в дан-

ных пространствах при $|\lambda| < \Omega^*(q)$, $1 < q < \infty$, исследуемые уравнения фредгольмовы, а пространства $L_p(\Gamma)$ включают в первое множество и включают второе, то спектр и собственные функции оператора (2.5) в пространстве L_p , $1 < p < \infty$, и оператора (2.6) в пространстве L_q , $1 < q < \infty$, в областях $|\lambda| < \Omega(p) \equiv \Omega^*\left(\frac{p}{p-1}\right)$ и $|\lambda| < \Omega^*(q)$, соответственно, совпадают с теми, что получены в [2]. Далее обычным образом, как и для уравнений на гладком контуре [11], [6], доказываются все остальные свойства уравнений (2.5), (2.6) и это непосредственно переносится на многосвязные области. Результаты можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 1. При $|\lambda| < \min_k \frac{\sin[\pi(1-1/p)]}{\sin[\pi - \omega_k(1-1/p)]}$ уравнение (2.5)

в пространстве L_p , $1 < p < \infty$, фредгольмово, полюсы резольвенты этого уравнения — действительные, простые и отсутствуют в интервале $-1 < \lambda < 1$. Если контур Γ_0 имеется ($\infty \notin D$), то $\lambda=1$ является полюсом резольвенты в любом случае, а $\lambda=-1$ — в случае, когда область не односвязна ($m > 0$). Если контур отсутствует ($\infty \in D$), то $\lambda=1$ не является полюсом резольвенты, а $\lambda=-1$ — полюс.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 можно, в частности, усмотреть полученный в [8] результат: уравнение (2.5) при $\lambda=1$ фредгольмово в пространствах $L_p(\Gamma)$, $1 < p < p_0 = 1 + \frac{1}{\max_k |1 - \omega_k/\pi|}$, максимум берется по всем угловым точкам. Поскольку для контуров без точек заострения $0 < \omega_k < 2\pi$, то уравнение (2.5) при $\lambda=1$ фредгольмово в $L_2(\Gamma)$.

С помощью непосредственной подстановки легко убедиться, что $v_0(s) = 1$ — решение однородного уравнения (2.6) в случае, когда имеется контур Γ_0 и $\lambda = 1$. Выпишем также решение однородного уравнения (2.5) для этого случая.

Пусть $z = \omega(\xi)$ — конформное отображение круга $|\xi| < 1$ на внешность контура Γ_0 такое, что $\omega(0) = \infty$. При этом контур Γ_0 переходит в контур L . Тогда решение однородного уравнения (2.5) дается выражением

$$\mu_0(t_0) = \begin{cases} e^{\psi(t_0)}, & t_0 \in \Gamma_0, \\ 0, & t_0 \in \Gamma_i, i \neq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\psi(t_0) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \ln[i\tau k(\tau)] \left\{ \frac{1}{\tau - t_0} - \frac{1}{2\tau} \right\} d\tau, \quad t = \omega(\tau), \quad \tau_0 = \omega^{-1}(t_0).$$

Здесь считается, что в угловых точках модуль скачка $|\arg k^+ - \arg k^-| < \pi$, и в качестве $\ln[i\tau k(\tau)]$ берется какая-нибудь ветвь, которая будет при этом условием однозначной на контуре L . Это выражение получено формальным использованием методов [1] для гладких контуров при решении однородной задачи Римана — Гильберта во внешности контура Γ_0 . Выражение (2.7) является предельным значением голоморфной снаружи Γ_0 функции

$$\Psi(z) = i\omega^{-1}(z) e^{\psi(z)}, \quad \psi(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \ln[i\tau k(\tau)] \left\{ \frac{1}{\tau - \omega^{-1}(z)} - \frac{1}{2\tau} \right\} d\tau, \quad (2.8)$$

умноженным на $k(t_0)$. Отсюда следует, что кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, порождаемая по формуле (2.4) с плотностью $\mu_0(s)$, равна нулю внутри Γ_0 и, значит, является решением однородной задачи (2.3), а функция $\mu_0(s)$ — решение однородного уравнения (2.5) при $\lambda = 1$. Непосредственная проверка показывает, что $\mu_0(s)$ — действительная функция. Необходимо еще, чтобы $\mu_0(s) \in L_p(\Gamma_0)$. Этот результат следует из пп. 19.2—19.8 [3]. Итак, (2.7) действительно представляет решение однородного уравнения (2.5) при $\lambda = 1$ в пространствах L_p , $1 < p < p_0$. Применение результатов [2], [3] позволяет обобщить методы [11] и показать, что других решений однородные уравнения (2.5), (2.6) при $\lambda = 1$ в пространствах $L_p(\Gamma)$, $1 < p < p_0$; $L_q(\Gamma)$, $\frac{p_0}{p_0 - 1} < q < \infty$, соответственно, не имеют (в [3], например, это утверждение доказано для случая односвязной области D). Имеет место

Теорема 2. Если контур Γ_0 имеется, то в пространствах L_p , $1 < p < p_0$, однородное уравнение (2.5) при $\lambda = 1$ имеет единственное нетривиальное решение (2.7), которое по формуле (2.4) порождает лишь нулевую функцию $\Phi(z)$ внутри Γ_0 , а соответствующее неоднородное уравнение разрешимо, если выполнено условие

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = 0. \quad (2.9)$$

§ 3. Возмущение уравнения, лежащего на спектре

Теорема 1 позволяет решать уравнение (2.5) при $\lambda = 1$ путем разложения резольвенты в ряд Неймана, что является более предпочтительным по сравнению с методами, требующими сведения исходного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений и последующего решения этой системы каким-либо общим методом, не

учитывающим ее связь с интегральным уравнением и спектральными свойствами последнего. Пусть контур Γ_0 отсутствует, т. е. область D — бесконечная, в этом случае $\lambda=1$ не является полюсом, а $\lambda=-1$ — простой полюс резольвенты уравнения (2.5). Тогда при $\lambda=1$ ряд Неймана, вообще говоря, не будет сходиться, однако будет сходиться ряд, полученный разложением по степеням λ резольвенты, умноженной на функцию $(\lambda+1)$ [11] (см. также [6]), отсюда

$$\mu = \frac{f}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i, \quad \mu_0 = (I + K) \frac{f}{2}, \quad \mu_i = K\mu_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Пусть теперь контур Γ_0 имеется, т. е. область D ограничена. Резольвента уравнения (2.5) имеет полюс при $\lambda=1$, а если область D — неодносвязна, то также при $\lambda=-1$. Если условие разрешимости (2.9) уравнения (2.5) при $\lambda=1$ выполнено, то его решение можно было бы, как описано в [11], представить в виде обычного ряда Неймана для односвязной области или его модификации (3.1) для неодносвязной. Однако решение уравнения (2.5) в этом случае является неустойчивым по отношению к малым изменениям правой части, нарушающим условие (2.9), которые всегда возможны при численном счете.

Рассмотрим линейное операторное уравнение

$$Ax = y, \quad (3.2)$$

где x, y — элементы банаховых пространств B_1 и B_2 , соответственно, A — линейный ограниченный оператор из B_1 в B_2 . Сопряженным к (3.2) будет уравнение

$$A^*x^* = y^*, \quad (3.3)$$

где x^*, y^* — элементы сопряженных пространств B_2^* и B_1^* , соответственно, A^* — сопряженный к A оператор. Имеет место обобщенная лемма Шмидта.

Лемма 1. Пусть (3.2) — обобщенное уравнение Фредгольма, $x_i, x_i^*, i=1, \dots, n$, — все линейно независимые решения однородных уравнений (3.2) и (3.3), соответственно. Тогда уравнение

$$(A - A_1)x = y, \quad A_1x = \sum_{i=1}^n \psi_i \varphi_i(x), \quad (3.4)$$

однозначно и безусловно разрешимо. Здесь φ_i и ψ_i — произвольные элементы, соответственно, B_1^* и B_2 такие, что

$$\det[x_i^*(\psi_j)] \neq 0, \quad \det[\varphi_i(x_j)] \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Если выполнены условия разрешимости уравнения (3.2) $x_i^*(y) = 0$, то решение x уравнения (3.4) является одним из решений (3.2) таким, что $\varphi_i(x) = 0, i=1, \dots, n$.

В нескольких других терминах эта лемма доказана в [12] (см. также [13]). Она позволяет снять уравнение (3.2) со спектра при наличии довольно малой информации о решениях однородных уравнений (3.2) и (3.3), достаточной лишь для проверки условий (3.5). Однако не ясно, как при этом изменяются спектральные свойства уравнения, если A — оператор из B в B и записан в виде $A = I - \lambda A_0$, поэтому затруднительно сделать выводы о решении полученного уравнения с помощью метода

последовательных приближений. Перепишем уравнение (3.2) для этого случая в виде

$$(I - \lambda A_0)x = y, \quad (3.6)$$

а уравнение (3.4) в виде

$$[I - \lambda(A_0 + A_{01})]x = y, \quad (3.7)$$

и пусть снова $A_{01}x = \sum_{i=1}^n \varphi_i \varphi_i(x)$. Введем обозначения R_λ, R_{λ_1} для резольвент, соответственно, уравнений (3.6) и (3.7), т. е. $R_\lambda(I - \lambda A_0) = I$ и $R_{\lambda_1}[I - \lambda(A_0 + A_{01})] = I$. Выразим R_{λ_1} через R_λ . Для этого подействуем оператором R_λ на уравнение (3.7) и в результате получим

$$x - \lambda \sum_{j=1}^n (R_\lambda \varphi_j) \varphi_j(x) = R_\lambda y. \quad (3.8)$$

Подействуем теперь на уравнение (3.8) функционалами φ_i , в результате чего будем иметь систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных $\varphi_i(x)$:

$$\sum_{j=1}^n [\delta_{ij} - \lambda \varphi_i(R_\lambda \varphi_j)] \varphi_j(x) = \varphi_i(R_\lambda y), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть $\Delta = \det[\delta_{ij} - \lambda \varphi_i(R_\lambda \varphi_j)]$ — определитель, d_{ij} — алгебраические дополнения матрицы этой системы. Решая (3.9) и подставляя выражения для $\varphi_i(x)$ в (3.8), получаем, что

$$x = R_{\lambda_1} y = R_\lambda y + \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^n (R_\lambda \varphi_j) \sum_{i=1}^n d_{ij}(\lambda) \varphi_i(R_\lambda y). \quad (3.10)$$

Отсюда видно, что множество полюсов резольвенты оператора $A_0 + A_{01}$ принадлежит объединению полюсов резольвенты оператора A_0 и нулей определителя $\Delta(\lambda)$. Используя лемму 1 или непосредственно исследуя представление (3.10) с учетом разложения резольвенты в окрестности полюса [14], получаем, что имеет место

Лемма 2. Множество полюсов резольвенты оператора $A_0 + A_{01}$ состоит из полюсов резольвенты оператора A_0 и нулей функции $\Delta(\lambda) = \det[\delta_{ij} - \lambda \varphi_i(R_\lambda \varphi_j)]$. Причем если $\lambda = \lambda_0$ — полюс резольвенты R_λ и

$$\det[x_i^*(\varphi_j)] \neq 0, \quad \det[\varphi_i(x_j)] \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где $x_i, x_i^*, i = 1, \dots, n$, — все решения однородного уравнения (3.6) и, соответственно, ему сопряженного при $\lambda = \lambda_0$, то $\lambda = \lambda_0$ — регулярная точка резольвенты R_{λ_1} уравнения (3.7).

Попытаемся теперь выбрать элементы φ_i, ψ_i так, чтобы резольвента R_{λ_1} была регулярной в точке $\lambda = \lambda_0$, где резольвента R_λ имеет полюс, и, с другой стороны, не приобретала дополнительных по сравнению с R_λ особых точек в конечной части λ -плоскости.

Лемма 3. Пусть λ_0 — простой полюс резольвенты R_λ уравнения (3.6). Если $\varphi_i = x_i^*, x_i^*(\varphi_j) = -\frac{1}{\lambda_0} \delta_{ij}$ или $\psi_j = x_j, \varphi_i(x_j) = -\frac{1}{\lambda_0} \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, n$, где $x_i, x_j^*, i, j = 1, \dots, n$, — все решения однородного уравнения (3.6) и ему сопряженного, соответственно, при $\lambda = \lambda_0$, то особые точки резольвенты R_{λ_1} уравнения (3.7) совпадают с особыми точками резольвенты R_λ уравнения (3.6) за исключением точки $\lambda = \lambda_0$, где резольвента R_{λ_1} регулярна.

Доказательство. Пусть, к примеру, $\varphi_i = x_i^*$, тогда $\Delta(\lambda) = \det [\delta_{ij} - \lambda x_i^*(R_\lambda \psi_j)]$. При достаточно малых $|\lambda|$

$$\begin{aligned} x_i^*(R_\lambda, \psi_j) &= x_i^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_0^k \psi_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_i^*(A_0^k \psi_j) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \lambda_0^{-k} x_i^*(\psi_j) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{-1} x_i^*(\psi_j). \end{aligned}$$

Аналитически продолжая эту функцию на всю комплексную плоскость λ , получаем, что $\Delta(\lambda) = \det \left[\delta_{ij} - \frac{\lambda \lambda_0}{\lambda_0 - \lambda} x_i^*(\psi_j) \right]$. Если $x_i^*(\psi_j) = -\frac{1}{\lambda_0} \delta_{ij}$, то $\Delta(\lambda) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda} \right)^n$ и, таким образом, $\Delta(\lambda)$ в конечной части λ -плоскости нулей не имеет.

Докажем, что $\det[\varphi_i(x_j)] = \det[x_i^*(x_j)] \neq 0$. Действительно,

$$\Delta(\lambda) = \det \left[\delta_{ij} - \lambda x_i^* \left\{ \sum_{k=1}^n a_{kj} x_k (\lambda - \lambda_0)^{-1} + f(\lambda) \right\} \right],$$

где $f(\lambda)$ — регулярная в точке λ_0 функция. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (-\lambda)^n (\lambda - \lambda_0)^{-n} \det \left[\sum_{k=1}^n a_{kj} x_i^*(x_k) \right] + O[(\lambda - \lambda_0)^{1-n}] = \\ &= (-\lambda)^n (\lambda - \lambda_0)^{-n} \det[a_{kj}] \det[x_i^*(x_k)] + O[(\lambda - \lambda_0)^{1-n}], \end{aligned}$$

и если $\det[x_i^*(x_k)] = 0$, то $\Delta(\lambda) = O[(\lambda - \lambda_0)^{1-n}]$, чего быть не может, так как $\Delta(\lambda) = \lambda_0^{-n} (\lambda_0 - \lambda)^{-n}$. Привлекая лемму 2, получаем искомый результат. Аналогично доказывается утверждение леммы, когда $\psi_j = x_j$, $\varphi_i(x_j) = -\lambda_0^{-1} \delta_{ij}$.

З а м е ч а н и е 2. Для доказательства применимости метода последовательных приближений часто вполне достаточно, чтобы все нули $\Delta(\lambda)$ были по модулю больше некоторого числа, скажем $|\lambda_i| > |\lambda_0|$. Для выполнения этого неравенства, естественно, условия леммы 3 можно значительно ослабить.

Вернемся к интегральному уравнению (2.5) при $\lambda = 1$, соответствующему ограниченной области D , т. е. при наличии контура Γ_0 , и заменим это уравнение следующим:

$$[I - \lambda(K + K_1)]\mu = f, \quad (3.11)$$

$$(K_1 \mu)(s_0) = \psi_1(s_0) \int_{\Gamma} \varphi_1(s) \mu(s) ds, \quad \psi_1 \in L_p(\Gamma), \quad \varphi_1 \in L_q(\Gamma).$$

Если $\int_{\Gamma} \varphi_1(s) ds \neq 0$ и $\int_{\Gamma} \varphi_1(s) \mu_0(s) ds \neq 0$, где $\mu_0(s)$ дается выражением (2.7), то выполнены условия леммы 1 и уравнение (3.11) является безусловно и однозначно разрешимым при $\lambda = 1$ и его решение совпадает с одним из решений уравнения (2.5). Например, можно взять $\varphi_1(s) = E$, $\varphi_1(s) = 1$, $s \in \Gamma$, т. е. представить K_1 в виде

$$(K_1 \mu)(s_0) = E \int_{\Gamma} \mu(s) ds, \quad (3.12)$$

где E — постоянная, не равная нулю. Интегрируя (2.7) с учетом (2.8), получаем, что условие $\int_{\Gamma} \varphi_1(s) \mu_0(s) ds \neq 0$ для таким образом выбранной функции $\varphi_1(s)$ выполнено. Если, кроме того, в (3.12) взять $E =$

$= - \left(\int_{\Gamma} ds \right)^{-1}$, то будут выполнены условия леммы 3 и характеристические числа уравнения (3.11) будут теми же, что и уравнения (2.5), за исключением точки $\lambda=1$. Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть контур Γ_0 имеется, тогда уравнение (3.11), где оператор K представлен в (2.5), $(K_1\mu)(s_0) = - \int_{\Gamma} \mu(s) ds / \int_{\Gamma} ds$, безусловно и однозначно разрешимо в L_p , $1 < p < p_0$, при $\lambda=1$, и его решение совпадает с решением уравнения (2.5) при $\lambda=1$ таким, что $\int_{\Gamma} \mu(s) ds = 0$. Если область D односвязна, то все особые точки резольвенты уравнения (3.11) лежат в области $|\lambda| > 1$; если область D не односвязна, то точка $\lambda = -1$ является простым полюсом резольвенты уравнения (3.11), остальные особые точки лежат в области $|\lambda| > 1$.

Отсюда сразу получаем, что решение уравнения (3.11) с указанным в теореме 3 оператором K_1 при $\lambda=1$ представимо в виде обычного ряда Неймана для односвязной области и модифицированного ряда (3.1) с заменой там K на $K+K_1$ для не односвязной, и эти ряды будут устойчиво сходиться для любой правой части уравнения (2.5). Отметим еще, что для решения рассматриваемых краевых задач безразлично, какое из решений уравнения (2.5) ($\lambda=1$) будет получено, поскольку по теореме 2 все они дадут одну и ту же функцию $\Phi(z)$.

§ 4. Решения исходных задач

Лемма 4. Пусть $\mu(s)$ — решение уравнения (2.5) при $\lambda=1$ на контуре $\Gamma = \bigcup_{i=0}^m \Gamma_i$ (Γ_0 может отсутствовать), тогда

$$\int_{\Gamma_i} \mu(s) ds = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} f(s) ds, \quad i = 1, \dots, m.$$

Эта лемма доказывается путем интегрирования уравнения (2.5).

Лемма 5. Пусть $\Phi(z)$ — функция, представленная выражением (2.4), где $\mu(s)$ — решение уравнения (2.5) при $\lambda=1$, $\tilde{\Gamma}$ — простой замкнутый контур в D , ориентированный против часовой стрелки, тогда $\int_{\tilde{\Gamma}} \Phi(z) dz = - \sum_i \int_{\Gamma_i} f(s) ds$, где суммирование ведется по всем контурам, охватываемым $\tilde{\Gamma}$.

Действительно, прямое интегрирование дает $\int_{\tilde{\Gamma}} \Phi(z) dz = - 2 \sum_i \int_{\Gamma_i} \mu(s) ds$, а использование леммы 4 приводит к нужному результату.

Теорема 4. Пусть D — связная область, граница которой $\Gamma = \bigcup_{i=0}^m \Gamma_i$ является совокупностью замкнутых кривых ограниченного вращения. Тогда задача с косо́й производной для уравнения Лапласа $\frac{du}{d\vec{l}} = f_2(s) \in L_r(\Gamma)$, $1 < r$, где $(\vec{l}, \vec{n}) = \text{const} \neq 0$, разрешима в классе функций, принадлежащих $C^2(D) \cap C(\bar{D})$, если $\int_{\Gamma_i} f_2(s) ds = 0$ на всех Γ_i , и ее

решение дается выражением (2.2), (2.4), где $\mu(s)$ — решение уравнения (2.5) при $\lambda=1$.

Действительно, любое решение (2.5) порождает по формулам (2.2), (2.4) решение задачи с косою производной, если получаемая по ним функция u является однозначной и ограниченной на бесконечности для бесконечной области D . Для выполнения этих условий необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Re} \left[\bar{\beta} \int_{\tilde{\Gamma}} \Phi(z) dz \right] = 0 \quad (4.1)$$

для любого контура $\tilde{\Gamma}$ внутри D . С учетом леммы 5 получаем, что для удовлетворения этого условия необходимо и достаточно, чтобы $\int_{\Gamma_i} f_2(s) ds = 0$, $i=1, \dots, m$. Если Γ_0 отсутствует, то по теореме 1 уравнение (2.5) разрешимо и теорема доказана. Если контур Γ_0 имеется, то для разрешимости уравнения (2.5) по теореме 2 необходимо еще, чтобы удовлетворялось условие (2.9), для выполнения которого требуется, чтобы $\int_{\Gamma_0} f_2(s) ds = 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Если $\vec{l} = \vec{n}$, т. е. $\beta = -i$, то условие (4.1) выполняется для любой функции $f_2(s)$, так как $\operatorname{Re} \left[i \int_{\tilde{\Gamma}} \Phi(z) dz \right] = -\operatorname{Im} \int_{\tilde{\Gamma}} f_2(s) ds = 0$, а для разрешимости уравнения (2.5) в случае ограниченной области необходимо лишь выполнение условия (2.9). Поэтому условие (2.9) будет достаточным для разрешимости задачи Неймана и представимости ее в виде (2.2), (2.4) в ограниченной области, а в неограниченной области она безусловно разрешима.

Перейдем к задаче Дирихле. Представление (2.1) при фиксированных постоянных A_i будет однозначным, если $f_1(s) \in W_{r,1}(\Gamma)$ для любых A_i и a_i , так как в этом случае $\operatorname{Re} \left\{ \int_{\tilde{\Gamma}} \left[\Phi(z) + \sum_{i=0}^m \frac{A_i}{z-a_i} \right] dz \right\} = \sum_i \int_{\Gamma_i} f(s) ds = \sum_i \int_{\Gamma_i} \frac{df_1}{ds} ds = 0$. Однако, если каким-либо произвольным обра-

зом зафиксировать постоянные A_i , то представление (2.1), (2.4) даст решение лишь видоизмененной задачи Дирихле [1], т. е. задачи Дирихле с граничными условиями, совпадающими с заданными с точностью до постоянных, своих для каждого контура. Для определения A_i , дающих решение исходной задачи Дирихле, сделаем процедуру, близкую той, что используется в [1] при решении задачи Дирихле с помощью потенциала двойного слоя. Наложим следующие условия на функцию $u(x, y)$, даваемую выражениями (2.1), (2.4), где $\mu(s)$ — решение уравнения (2.5) при $\lambda=1$:

$$u(x(s_i), y(s_i)) = f_1(s_i), \quad i=0, \dots, m. \quad (4.2)$$

Здесь s_i — произвольные точки, соответственно, контуров Γ_i . Если контур Γ_0 отсутствует, то вместо условия (4.2) при $i=0$ добавляется условие

$$\sum_{i=1}^m A_i = 0, \quad (4.3)$$

обеспечивающее ограниченность u на бесконечности. Если условиям

(4.2), (4.3) удастся удовлетворить при каком-либо наборе A_i , то этот набор даст решение исходной задачи Дирихле.

Условия (4.2) образуют систему линейных алгебраических уравнений для определения A_i

$$\sum_{j=1}^m A_j \left(\ln \left| \frac{t_i - a_j}{z_0 - a_j} \right| - \operatorname{Re} \int_{z_0}^{t_i} \Phi_j(z) dz \right) + A_0 = f_1(t_i) - \\ - \operatorname{Re} \int_{z_0}^{t_i} \Phi_0(z) dz, \quad i = 0, \dots, m. \quad (4.4)$$

Если контур Γ_0 отсутствует, то вместо условия (4.4) при $i=0$ добавляется условие (4.3). Здесь $\Phi_j(z)$, $j=1, \dots, m$, — функции, получаемые с помощью (2.4), если в качестве μ подставить туда решение уравнения (2.5) с правой частью $\operatorname{Re} \frac{k(s)}{t(s) - a_j}$, а $\Phi_j(z)$ порождается решением (2.5)

с правой частью $\frac{df_1(s)}{ds}$. Определитель полученной системы уравнений отличен от нуля, так как в противном случае существовали бы отличные от нуля постоянные A_i , удовлетворяющие условиям (4.2), (4.3) при нулевой правой части системы (4.4), (4.3), в частности, когда решается задача Дирихле с нулевыми граничными условиями. Действительно, тогда $f_1(t_i) = 0$, $\frac{df_1}{ds} = 0$, и если контур Γ_0 отсутствует, то уравнение (2.5)

при $\lambda=1$ с нулевой правой частью имеет лишь тривиальное решение $\mu_0 = 0$ и, значит, $\Phi_0(z) = 0$, а если Γ_0 имеется, то уравнение (2.5) имеет нетривиальное решение μ_0 , даваемое выражением (2.7), которое вследствие теоремы 2 порождает лишь нулевую функцию $\Phi_0(z)$. Таким образом, если определитель системы (4.4), (4.3) равен нулю, то удастся построить с помощью (2.1) отличное от нуля решение задачи Дирихле, так как по доказанному выше интеграл от функции $\Phi(z)$ в (2.1) для задачи Дирихле с непрерывными граничными условиями однозначен и не равен отличной от нуля постоянной, тогда как $\sum_{i=1}^m A_i \ln \frac{z - a_i}{z_0 - a_i}$ — функция

неоднозначная. Но задача Дирихле с нулевыми граничными условиями не может иметь отличных от нуля решений в изучаемых нами областях. Таким образом, постоянные A_i определяются и вполне однозначно.

При фактическом численном решении изложенным методом задачи Дирихле в многосвязной области необходимо сначала решить уравнение (2.5) (или (3.11) для ограниченной области) с $m+1$ правой частью $\frac{df_1(s)}{ds}$, $\operatorname{Re} \frac{k(s)}{t(s) - a_j}$, $j=1, \dots, m$, получить по формуле (2.4) функции $\Phi_j(z)$, $j=0, \dots, m$, затем найти постоянные A_j из системы (4.4), (4.3), построить функцию $\Phi(z) = \Phi_0(z) - \sum_{j=1}^m A_j \Phi_j(z)$ и, подставив это выражение в (2.1), найти окончательное решение.

З а м е ч а н и е 4. Если область D односвязна, т. е. имеется лишь один контур Γ_0 или Γ_1 , то нет необходимости определять постоянные A_j . Действительно, если область D ограничена, то единственную имеющуюся постоянную A_0 можно взять в виде $A_0 = f_1(t_0)$, устремив одновременно точку z_0 в (2.1) к точке t_0 по пути, лежащему в D . Если область D неограни-

чена, то для ограниченности решения на бесконечности необходимо, чтобы $A_1=0$, а с постоянной A_0 можно поступить так же, как и в случае ограниченной области. Таким образом, уравнение (2.5) или (3.11) необходимо решить лишь для одной правой части.

Итак, исходные краевые задачи удалось свести к интегральным уравнениям, решаемым методом последовательных приближений.

На основании приведенных результатов можно далее исследовать гладкость решения полученных интегральных уравнений и показать, что оно представимо в виде произведения известной весовой функции, имеющей особенности в угловых точках, на неизвестную гладкую функцию, значения которой в угловых точках дадут искомые значения коэффициентов при степенной особенности в производных решения исходных задач. Подробное изложение этих положений выходит за рамки данной статьи и станет, видимо, предметом отдельной работы.

Литература

1. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Radon I.* Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential Sitzungberichte Acad. Wiss. Wien, 1919, B. 128, S. 1123—1167. Русский перевод: О краевых задачах для логарифмического потенциала, УМН, 1946, т. 1, № 3—4, с. 96—124.
3. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.
4. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Труды Моск. матем. об-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
5. *Михайлов С. Е.* Антиплоская деформация упругих тел с угловыми точками.— В кн.: Пятый Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. (Аннотации докладов). Алма-Ата: Наука, 1981, с. 257.
6. *Паргон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
7. *Лопатинский Я. Б.* Про один тип сингулярных интегральных рівнянь.— Теор. прикл. матем., Львівськ. ун-т, 1963, вып. II, с. 53.
8. *Шелепов В. Ю.* Об индексе интегрального оператора типа потенциала в пространстве L_p .— ДАН СССР, 1969, т. 186, № 6, с. 1266—1268.
9. *Габов С. А.* Угловой потенциал и задача с косою производной для гармонических функций.— ЖВМ и МФ, 1977, т. 17, № 3, с. 706—717.
10. *Габов С. А., Шевцов П. В.* Угловой потенциал на кривых ограниченного вращения.— ДАН СССР, 1979, т. 249, № 2, с. 271—274.
11. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953.
12. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
13. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
14. *Крачковский С. Н.* О расширенной области сингулярности оператора $T_\lambda = E - \lambda A$.— ДАН СССР, 1954, т. 96, № 6, с. 1101—1104.

Москва

Поступила в редакцию
8.VI.1982