МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1991

УДК 539.3.01

С. Е. МИХАЙЛОВ

ОБЩЕЕ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КРУЧЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

В работе строится общее решение уравнения осесимметричного кручения для упругой цилиндрически анизотропной среды путем сведения его к соответствующему уравнению для изотропной среды. С использованием этого подхода и известного фундаментального решения для аналогичной изотропной задачи получено фундаментальное решение уравнения осесимметричного кручения и для рассматриваемой среды, т. е. решение задачи теории упругости для бесконечного цилиндрически анизотропного пространства, находящегося под действием сил, сосредоточенных на кольцевой линии, равномерно распределенных по этой линии и направленных по касательной к ней. Представлены предельные соотношения для характеристических значений параметров. В качестве одного из предельных случаев получено фундаментальное решение антиплоской задачи для упругой прямолинейно анизотропной среды.

1. Основные уравнения и общее решение. В настоящее время широкое распространение получили численные методы решения краевых задач механики деформируемого твердого тела, основанные на использовании фундаментальных решений, т. е. решений, описывающих реакцию бесконечного пространства или плоскости на сосредоточенное воздействие. К таким методам можно отнести прямой и непрямой методы граничных интегральных уравнений (см., например, [1, 2]), а также метод источников (компенсирующих нагрузок [3, 4]), в котором решение краевой задачи строится путем суперпозиции сосредоточенных воздействий в пространстве, располагаемых на некоторой поверхности, охватывающей исследуемую область.

В изотропной упругой среде фундаментальное решение дается матрицей Кельвина — Сомильяны. Известны также трехмерные фундаментальные решения уравнений теории упругости для среды с прямолинейной анизотропией [5]. В [6] представлены осесимметричные фундаментальные решения уравнений теплопроводности для цилиндрически анизотропной среды.

Пусть (r, θ, z) — цилиндрическая система координат. Рассмотрим основные уравнения теории упругости анизотропного тела при наличии осевой симметрии [7]. В отличие от общепринятой нумерации координат установим далее следующее соответствие индексов: $r\leftrightarrow 1$, $z\leftrightarrow 2$, $\theta\leftrightarrow 3$. Тогда уравнения равновесия будут иметь вид

$$\sigma_{p\alpha,\alpha}+r^{-1}(\sigma_{p1}-\delta_{p1}\sigma_{33}+\delta_{p3}\sigma_{13})=-F_p(r, z) \tag{1.1}$$

закон Гука и связь между деформациями и перемещениями соответственно

$$\sigma_{pj}=c_{pjkl}\varepsilon_{hl} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{hl}=(u_{h,l}+u_{l,h})/2+r^{-1}[\delta_{h3}\delta_{l3}u_1-(\delta_{h1}\delta_{l3}+\delta_{h3}\delta_{l1})u_3/2] \tag{1.3}$$

Здесь и далее индекс после запятой означает производную по соответствующей координате, по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование от 1 до 2 и по повторяющимся латинским индексам — от 1 до 3, если не указано иное (за исключением индексов r, θ, z, по которым суммирование не предполагается), δ_{pj} — символ Кронекера, F — заданные объемные усилия. В (1.1)—(1.3) нужно иметь в виду, что $u_{k,3}=0$ из-за осевой симметрии решения.

Если среда обладает цилиндрической анизотропией с осью, совпадающей с осью z, и однородна, то компоненты тензора упругости c_{pjkl} в этой системе координат постоянны. Тогда, подставляя (1.2) с учетом (1.3) в (1.1), придем к системе Ламе относительно u_k:

$$c_{p\alpha k\beta}u_{k,\beta\alpha}+r^{-1}\overset{(1)}{c}_{p\alpha k}u_{k,\alpha}+r^{-2}\overset{(2)}{c}_{pk}\ u_k=-F_p \tag{1.4}$$

$$\overset{(1)}{c}_{p\alpha k}:=c_{p\alpha 33}\delta_{k1}-c_{p\alpha 13}\delta_{k3}+c_{p1k\alpha}-\delta_{p1}c_{33k\alpha}+\delta_{p3}c_{13k\alpha}$$

$$\overset{(2)}{c}_{pk}:=-c_{3333}\delta_{p1}\delta_{k1}-c_{1313}\delta_{p3}\delta_{k3}+c_{1333}(\delta_{k1}\delta_{p3}+\delta_{p3}\delta_{k1})$$

Будем далее полагать, что меридиальные плоскости, проходящие через ось симметрии, являются плоскостями симметрии упругих свойств (см., например, [7]). Тогда $c_{3\alpha\gamma\beta}=\overset{(1)}{c}_{3\alpha\gamma}=\overset{(1)}{c}_{\gamma\alpha 3}=\overset{(2)}{c}_{3\gamma}=\overset{(2)}{c}_{\gamma 3}=0$ и система (1.4) распадается на систему осесимметричных уравнений без кручения относительно u_γ:

$$c_{\omega\alpha\gamma\beta}u_{\gamma,\beta\alpha}+r^{-1}\overset{(1)}{c}_{\omega\alpha\gamma}u_{\gamma,\alpha}+r^{-2}\overset{(2)}{c}_{\omega\gamma}\ u_\gamma=-F_\omega(r,z)$$

и уравнение осесимметричного кручения относительно $u\equiv u_3\equiv u_\theta$:

$$c_{3131}[u_{,rr}+(u/r)_{,r}]+c_{3232}u_{,zz}+c_{3132}(2u_{,rz}+u_{,z}/r)=-F_\theta(r,\ z) \tag{1.5}$$

Для изотропного тела $c_{3131}=c_{3232}=G$ и (1.5) переходит в уравнение

$$G[u_{,rr}+(u/r)_{,r}+u_{,zz}]=-F_\theta(r,\ z) \tag{1.6}$$

По аналогии с [6] сделаем в (1.5) замену переменных $(r,\ z)$ на $(r,\ z^*)$, где

$$z^*=(z-\chi r)/\xi,\quad \chi=c_{3132}/c_{3131},\quad \xi=[c_{3232}/c_{3131}-\chi^2]^{1/2} \tag{1.7}$$

Обозначим $u^*(r,\ z^*)=u(r,\ \xi z^*+\chi r)=u(r,\ z)$. Принимая во внимание, что

$$u_{,r}=\overset{*}{u}_{,r}-\chi\xi^{-1}\overset{*}{u}_{,z^*},\quad u_{,z}=\xi^{-1}\overset{*}{u}_{,z^*},\quad u_{,zz}=\xi^{-2}\overset{*}{u}_{,z^*z^*}$$

$$u_{,rr}=\overset{*}{u}_{,rr}-2\chi\xi^{-1}\overset{*}{u}_{,rz^*}+\chi^2\xi^{-2}\overset{*}{u}_{,z^*z^*},\quad u_{,rz}=\xi^{-1}\overset{*}{u}_{,rz^*}-\chi\xi^{-2}\overset{*}{u}_{,z^*z^*}$$

после подстановки в (1.5) переходим к уравнению осесимметричного кручения для изотропной среды (1.6) относительно u^* по независимым переменным $(r,\ z^*)$ с правой частью $F_\theta{}^*(r,\ z^*)=F_\theta(r,\ \xi z^*+\chi r)$ и $G=c_{3131}$.

Таким образом, общее решение уравнения осесимметричного кручения цилиндрически анизотропной среды (1.5) удалось выразить через решение u^* аналогичного уравнения для изотропной среды.

2. Фундаментальное решение. Будем искать решение (1.5) с правой частью $F_\theta(r,\ z)=F_0\delta(r_\Delta)\delta(z_\Delta)$, где δ — дельта-функция Дирака, F_0 — константа, $r_\Delta=r-r_0$, $z_\Delta=z-z_0$, $(r_0,\ z_0)$ — координаты точки приложения сосредоточенной силы.

Решение соответствующего уравнения (1.6) для изотропной среды с той же правой частью известно (см., например, [2]) и имеет вид [1]

$$u(r, z; r_0, z_0) = (2\pi G)^{-1}(r_0/r)^{1/2}F_0Q_{1/2}(a/b) =$$
$$= (2\pi G)^{-1}(r_0/r)^{1/2}F_0[ab^{-1}\mu\mathbf{K}(\mu) - 2\mu^{-1}\mathbf{E}(\mu)] \qquad (2.1)$$

где $Q_{1/2}$ — функция Лежандра второго рода;

$$\mathbf{K}(\mu) = \int_0^{\pi/2}(1-\mu^2\sin^2\theta)^{-1/2}d\theta, \quad \mathbf{E}(\mu) = \int_0^{\pi/2}(1-\mu^2\sin^2\theta)^{1/2}d\theta$$

— полные нормальные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, $a=r^2+r_0^2+z_\Delta^2$, $b=2rr_0$, $\mu=[2b/(a+b)]^{1/2}$.

Пусть еще $z_0^*=(z_0-\chi r_0)/\xi$, $z_\Delta^*=z^*-z_0^*$, $R^*=(r_\Delta^2+z_\Delta^{*2})^{1/2}$, $a^*=r^2+r_0^2+z_\Delta^{*2}$, $\mu^*=[2b/(a^*+b)]^{1/2}$.

Учитывая, что после замены переменных (1.7) исходное уравнение (1.5) сводится к (1.6) по независимым переменным (r, z^*) с правой частью $-F^*(r, z^*; r_0, z_0^*)=-F_0\delta(r_\Delta)\delta(\xi z_\Delta^*+\chi r_\Delta)$ и заменой G на c_{3131}, и используя (2.1) в качестве ядра объемного потенциала с плотностью F^*, получаем искомое фундаментальное решение статического уравнения осесимметричного кручения

$$u(r, z; r_0, z_0) = (2\pi\xi c_{3131})^{-1}(r_0/r)^{1/2}F_0Q_{1/2}(a^*/b) =$$
$$= (2\pi\xi c_{3131})^{-1}(r_0/r)^{1/2}F_0[a^*b^{-1}\mu^*\mathbf{K}(\mu^*) - 2\mu^{*-1}\mathbf{E}(\mu^*)] \qquad (2.2)$$

Учитывая свойства функций Лежандра второго рода и их связь с эллиптическими интегралами [8, 9], можно из (2.2) получить выражения градиента фундаментального решения

$$\nabla u = u_{,\alpha}(r, z; r_0, z_0)\mathbf{e}_\alpha = (2\pi\xi c_{3131})^{-1}(r_0/r)^{1/2}F_0\{(a^{*2}-b^2)^{-1}[a^*Q_{1/2}(a^*/b) -$$
$$- bQ_{-1/2}(a^*/b)][(r-r_0a^*/b - z_\Delta^*\chi/\xi)\mathbf{e}_r + (z_\Delta^*/\xi)\mathbf{e}_z] - (2r)^{-1}Q_{1/2}(a^*/b)\mathbf{e}_r\} =$$
$$= (2\pi\xi c_{3131})^{-1}(r_0/r)^{1/2}F_0\{[b^{-1}\mu^*\mathbf{K}(\mu^*) - 2a^*(a^{*2}-b^2)^{-1}\mu^{*-1}\mathbf{E}(\mu^*)]\times$$
$$\times[(r-r_0a^*/b - z_\Delta^*\chi/\xi)\mathbf{e}_r + (z_\Delta^*/\xi)\mathbf{e}_z] - (2r)^{-1}\mu^*\mathbf{K}(\mu^*)\mathbf{e}_r\} \qquad (2.3)$$

Подстановка этих соотношений в (1.3), (1.2) позволяет вычислить отличные от нуля компоненты деформаций $\varepsilon_{r\theta}$, $\varepsilon_{z\theta}$ и напряжений $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{z\theta}$ фундаментального решения.

Остановимся еще на предельных свойствах фундаментального решения при $r/r_0\to 0$, $r_0/R^*\to 0$, $R^*/r_0\to 0$. Учтем [8], что

$$Q_{1/2}(\eta)\to\pi 2^{-5/2}\eta^{-3/2}, \quad Q_{-1/2}(\eta)\to\pi 2^{-1/2}\eta^{-1/2} \quad (\eta\to\infty)$$
$$Q_\nu(1+\eta)\to -(1/2)\ln(\eta/2) - \gamma - \Psi(1+\nu) + O(\eta\ln\eta) \quad (\eta\to 0)$$

где Ψ — логарифмическая производная Г-функция, а γ — постоянная Эйлера — Маскерони. Тогда после некоторых преобразований из (2.2), (2.3) будем иметь

$$r/r_0\to 0 \Rightarrow u\to(4\xi c_{3131})^{-1}F_0[1+(z_\Delta^*/r_0)^2]^{-3/2}r/r_0$$
$$\nabla u\to(4\xi c_{3131}r_0)^{-1}F_0[1+(x_\Delta^*/r_0)^2]^{-3/2}\mathbf{e}_r$$
$$r_0/R^*\to 0 \Rightarrow u\to(4\xi c_{3131})^{-1}F_0r_0^2r_\Delta R^{*-3}$$

---

[1] Отметим, что в [2] для эллиптического интеграла используется, видимо, определение $\mathbf{K}(m)=\int_0^{\pi/2}(1-m\sin^2\theta)^{-1/2}d\theta$, и поэтому в выражении типа (2.1) фигурирует вместо μ параметр $m=\mu^2$.

$$\nabla u \to (4\xi c_{3131})^{-1} r_0^2 R^{*-3} F_0 \{\mathbf{e}_r + (r_\Delta/R^*)\,] [3(\chi\xi^{-1} z_\Delta^*/R^* - r_\Delta/R^*)\mathbf{e}_r - -3\xi^{-1}(z_\Delta^*/R^*)\mathbf{e}_z]\}$$

$$R^*/r_0 \to 0 \Rightarrow u \to (2\pi\xi c_{3131})^{-1} F_0 [-\ln R^* + \ln(2r_0) - \gamma - \Psi(^3/_2)] + +O[R^* r_0^{-1} \ln(R^* r_0^{-1})] \tag{2.4}$$

$$\nabla u \to -(2\pi\xi c_{3131})^{-1} F_0 [(r_\Delta - \chi\xi^{-1} z_\Delta^*)\mathbf{e}_r + \xi^{-1} z_\Delta^* \mathbf{e}_z]/R^{*2} \tag{2.5}$$

Соотношения (2.4), (2.5) не только дают главные члены фундаментального решения при малом расстоянии между сосредоточенной силой и точкой наблюдения, но и позволяют получить фундаментальное решение $u^{(a)}$ в антиплоской задаче с прямолинейной анизотропией, в которую вырождается цилиндрическая анизотропия при r, $r_0 \to \infty$. Однако нужно иметь в виду, что в осесимметричной задаче значение функции u отсчитывается от ее значения на бесконечности, тогда как в плоских задачах фундаментальное решение на бесконечности может быть неограниченным. Поэтому будем отсчитывать значение функции от ее значения в некоторой фиксированной точке r_1, z_1:

$$u^{(a)}(r_\Delta, z_\Delta) = \lim\, [u(r_0 + r_\Delta, z; r_0, z_0) - u(r_0 + r_{1\Delta}, z_1; r_0, z_0)] \quad (r_0 \to \infty)$$

С учетом (2.4) тогда фундаментальное решение задачи антиплоской деформации для прямолинейно анизотропной среды с плоскостью симметрии упругих свойств имеет вид $u^{(a)}(r_\Delta, z_\Delta) = -(2\pi\xi c_{3131})^{-1} F_0 \ln R^* + C_0$, где постоянная $C_0 = (2\pi\xi c_{3131})^{-1} F_0 \ln(r_{1\Delta}^2 + z_{1\Delta}^{*2})$ и ее можно отбросить. Представления для $\nabla u^{(a)}$ даются правой частью соотношений (2.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
3. *Коренев Б. Г.* Метод компенсирующих нагрузок в приложении к задачам о равновесии, колебаниях и устойчивости плит и мембран // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 5–6. С. 61–72.
4. *Patterson C., Sheikh M. A.* A modified Trefftz method for three dimensional elasticity // Boundary Element. Proc. 5th Intern. Conf., Hiroshima, 1983. Berlin: Springer, 1983. P. 427–437.
5. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. Вып. 9. С. 783–791.
6. *Михайлов С. Е.* Осесимметричные фундаментальные решения уравнений теплопроводности для цилиндрически анизотропной среды // ПМТФ. 1990. № 4. С. 64–68.
7. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 294 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.IX.1989