ДАН СССР. – 1984. – Т. 274. – № 2

УДК 539.37

С.Е. МИХАЙЛОВ, А.Е. ОСОКИН

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СТАРЕЮЩЕЙ СРЕДЫ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

(Представлено академиком Ю.Н. Работновым 8 II 1983)

При приведении к интегральным уравнениям граничных задач для сред с линейными определяющими уравнениями (анизотропная упругая среда, стареющая среда) необходимо иметь фундаментальное решение, которое дает поля смещений и напряжений для неограниченной среды, деформируемой сосредоточенным единичным усилием. В изотропной среде такое решение дается матрицей Кельвина–Сомильяны и выписывается в явном виде. При произвольной анизотропии в упругой среде фундаментальное решение, построенное в работе [1], приводится к интегралу по контуру единичной окружности, ориентированной в пространстве специальным образом [2–4]. Аналогичные решения для наследственной упругости без старения [5] даны в изотропном случае в [6], а в анизотропном – в [7, 8]. В данной статье результаты [1, 2, 7, 8] обобщаются на однородную стареющую наследственно-упругую среду [9, 10].

Пусть x_k, $k = 1, 2, 3,$ – декартовы координаты. Рассмотрим анизотропную однородную наследственно-упругую стареющую среду, в которой напряжения σ_{ij} и деформации ϵ_{kl} связаны уравнением [9, 10]

$$\sigma_{ij}(t) = [\mathrm{c}_{ijkl}\,\epsilon_{kl}]\,(t),$$

$$\mathrm{c}_{ijkl} = c^{\mathrm{I}}_{ijkl} + \mathrm{c}^{\mathrm{II}}_{ijkl}. \tag{1}$$

Здесь t – время, $c^{\mathrm{I}}_{ijkl}(t)$ – тензор модулей мгновенной упругости, $\mathrm{c}^{\mathrm{II}}_{ijkl}$ – интегральный оператор вида

$$[\,\mathrm{c}^{\mathrm{II}}_{ijkl}\;\epsilon_{kl}]\,(t) = \int_0^t c_{ijkl}(t,\tau)\,\epsilon_{kl}(\tau)\,d\tau.$$

Оператор c_{ijkl} удовлетворяет условиям симметрии

$$\mathrm{c}_{ijkl} = \mathrm{c}_{jikl} = \mathrm{c}_{ijlk} = \mathrm{c}_{klij}.$$

Пусть зависимость компонент усилия, приложенного в начале координат, от времени определяется функциями $f_i(t)$. Искомое решение удовлетворяет уравнению равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\mathrm{x},t) = -\delta(\mathrm{x})\,f_i(t), \tag{2}$$

где $\delta(\mathrm{x})$ – дельта-функция. Подставляя (1) в (2) и учитывая $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, приходим к уравнениям Ламе относительно смещений

$$[\mathrm{c}_{ijkl}\,u_{k,jl}]\,(\mathrm{x},t) = -\delta(\mathrm{x})\,f_i(t). \tag{3}$$

Введем обычным образом прямое и обратное преобразования Фурье, обозначая тильдой трансформанты и параметры преобразования:

$$\tilde{\mathrm{u}}(\tilde{\mathrm{x}},t) = (2\pi)^{-3/2}\int_V \mathrm{u}(\mathrm{x},t)\exp(i\,\tilde{x}_p x_p)\,dV,$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},t) = (2\pi)^{-3/2}\int_{\tilde V} \tilde{\mathrm{u}}(\tilde{\mathrm{x}},t)\,\exp(-i\,\tilde{x}_p x_p)\,d\tilde V, \tag{4}$$

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3, \quad d\tilde V = d\tilde x_1 d\tilde x_2\, d\tilde x_3.$$

Применяя преобразование Фурье к левой и правой частям уравнения (3), получим

(5) $\quad \tilde{x}_j \tilde{x}_l\, [c_{ijkl}\ \tilde{u}_k]\ (\tilde{x},\ t) = (2\pi)^{-3/2} f_i(t)$.

Будем рассматривать среды, модули мгновенной упругости которых таковы, что энергия упругого деформирования является положительно-определенной квадратичной формой компонент деформации. Тогда при $\tilde{x} \neq 0$ обратима квадратная матрица

$$\tilde{c}^{\,\mathrm{I}}_{ik}(\tilde{x},\ t) = c^{\mathrm{I}}_{ijkl}(t)\ \tilde{x}_j\ \tilde{x}_l$$

и, следовательно, всегда существует матрица $(\tilde{c}^{\mathrm{I}})^{-1}_{qi}(\tilde{x}, t)$ такая, что

$$(\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{qi}(\tilde{x},\ t)\ \tilde{c}^{\,\mathrm{I}}_{ik}(\tilde{x}, t) = \delta_{qk},$$

где δ_{qk} – символ Кронекера. Умножая (5) на $(\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{qi}$, получим

(6) $\quad [\delta_{qk} + \tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{qk}]\ \tilde{u}_k = (\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{qi}\ f_i\,(2\pi)^{-3/2}$.

Здесь оператор $\tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{qk}(\tilde{x})$ имеет вид

(7) $\quad \tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{qk}(\tilde{x}) = (\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{qi}(\tilde{x},\ t)\ \tilde{x}_j \tilde{x}_l\ c^{\mathrm{II}}_{ijkl}$.

Таким образом, задача построения фундаментального решения в трансформантах сводится к обращению оператора $[\delta_{qk} + \tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{qk}]$. Чтобы осуществить это обращение, представим вектор $\tilde{x}$ в виде $\tilde{x}_j = \tilde{r}\tilde{\eta}_j$, где $\tilde{\eta}_j \tilde{\eta}_j = 1$, а $0 \leqslant \tilde{r} < \infty$. Так как $(\tilde{c}^{\mathrm{I}})^{-1}_{qi}\ (\tilde{x},\ \ t)$ есть однородная функция $\tilde{x}$ степени -2, то

$$(\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{qi}(\tilde{x},\ t) = (\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{qi}(\tilde{\eta}, t)\ \tilde{r}^{-2},$$

и на основании (7) получим

(8) $\quad \tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{qk}\ \tilde{u}_k = \int\limits_0^t (\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{qi}(\tilde{\eta},\ t)\ \tilde{\eta}_j \tilde{\eta}_l\ c_{ijkl}(t, \tau)\,\tilde{u}_k(\tilde{x},\ \tau)\ d\tau$.

Будем рассматривать далее операторы c_{ijkl} такие, что функции c^{I}_{ijkl} непрерывны на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, а c^{II}_{ijkl} – компактный оператор Вольтерра в пространстве вектор-функций, непрерывных на этом отрезке. В частности, ядра операторов c^{II}_{ijkl} могут иметь вид

$$c_{ijkl}(t, \tau) = c^{0}_{ijkl}(t,\ \tau)\,(t - \tau)^{-\alpha},$$

где функции $c^{0}_{ijkl}(t, \tau)$ непрерывны при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, а $\alpha < 1$. Тогда, учитывая что $\tilde{\eta}_i \tilde{\eta}_i = 1$, а матрица $(\tilde{c}^{\mathrm{I}})^{-1}_{qi}(\tilde{\eta},\ t)$ ограничена, легко показать, что $\tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{qk}(\tilde{\eta}, t)$ – также компактный оператор Вольтерра, и, значит (см., например, [11]), решение уравнения (6) можно представить в виде ряда Неймана, сходящегося равномерно относительно $\tilde{\eta}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\tilde{u}_k(\tilde{x}, t) = (2\pi)^{-3/2}\ [\tilde{c}^{-1}_{ki}\ f_i\,]\,(\tilde{\eta}, t)\,\tilde{r}^{-2},$$

(9)

$$\tilde{c}^{-1}_{ki} = (\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{ki} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, d^{(n)}_{kq}\ (\tilde{c}^{\,\mathrm{I}})^{-1}_{qi},$$

где $d^{(n)}_{kq}$ есть n-я степень оператора $\tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{kq}$, т.е.

$$d^{(n)}_{kq} = \tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{ks}\ d^{(n-1)}_{sq}, \qquad d^{(1)}_{kq} = \tilde{c}^{\,\mathrm{III}}_{kq},$$

и если обозначить через $d_{kq}^{(n)}$ ядро интегрального оператора $\mathbf{d}_{kq}^{(n)}$, то

$$[\mathbf{d}_{kq}^{(n)}\ (\tilde{c}^{\,1})_{qi}^{-1}\ f_i]\,(\tilde{\eta},\ t) =$$

$$= \int_0^t d_{kq}^{(n)}(\tilde{\eta},\ t,\ \tau)\,(\tilde{c}^{\,1})_{qi}^{-1}(\tilde{\eta},\ \tau)\ f_i(\tau)\,d\tau\,.$$

Чтобы получить $u_k(\mathrm{x}, t)$, осуществим обратное преобразование Фурье ряда (9), аналогично тому, как это сделано в [2] при отсутствии наследственности. Введем элемент телесного угла в пространстве изображений $d\tilde{\omega}$. Тогда $d\tilde{V} = d\tilde{\omega}\ \tilde{r}^2 d\tilde{r}$, причем $d\tilde{\omega} = -d\tilde{\varphi}\,d\tilde{\nu}$, где $\tilde{\nu} = \cos\tilde{\theta}$, а $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\theta}$ – углы сферических координат. Угол $\tilde{\theta}$ будем отсчитывать от направления x. Тогда

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\eta}_p\, x_p}{|\,\mathrm{x}\,|}\,.$$

После интегрирования по $\tilde{r}$ от 0 до $\tilde{R}$ (4) удобно представить в виде

$$(10)\qquad u_k(\mathrm{x},\ t) = \lim_{\tilde{R}\to\infty}\ (2\pi)^{-3/2} \int_{\tilde{\omega}} \tilde{u}_k(\tilde{\eta}, t)\ \frac{\sin(\tilde{R}\,\tilde{\eta}_p x_p)}{\eta_p\, x_p}\ d\tilde{\omega}\,.$$

Воспользовавшись соотношением [3]

$$\lim_{\tilde{R}\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)\ \frac{\sin(\tilde{R}\,z)}{z}\ dz = \frac{\pi}{2}\,[\,\psi(+0) + \psi(-0)]\,,$$

из (10) получим

$$(11)\qquad u_k(\mathrm{x},\ t) = (2\pi)^{-3/2}\,|\,\mathrm{x}\,|^{-1} \lim_{\tilde{R}\to\infty} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_{-1}^{1} \tilde{u}_k(\tilde{\nu},\ \tilde{\varphi},\ t)\ \frac{\sin(\tilde{R}\,|\,\mathrm{x}\,|\ \tilde{\nu})}{\tilde{\nu}}\ d\tilde{\nu} =$$

$$= (8\pi)^{-1/2}\,|\,\mathrm{x}\,|^{-1} \int_0^{2\pi} \tilde{u}_k(0,\ \tilde{\varphi}, t)\ d\tilde{\varphi}\,.$$

Чтобы получить напряжения, соответствующие этому полю смещений, приведем (11) к виду, удобному для вычисления частных производных $u_{k,l}(\mathrm{x}, t)$:

$$(12)\qquad \sqrt{8\pi}\ u_k(\mathrm{x}, t) = \frac{1}{|\mathrm{x}|} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_{-1}^{1} u_k(\tilde{\nu},\ \tilde{\varphi},\ t)\ \delta(\tilde{\nu})\ d\tilde{\nu} =$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{x}|} \int_{\tilde{\omega}} \tilde{u}_k(\tilde{\eta},\ t)\ \delta(\tilde{\nu})\ d\tilde{\omega} = \frac{1}{|\,\mathrm{x}\,|} \int_{\tilde{\omega}} \tilde{u}_k(\tilde{\eta},\ t)\ \delta\left(\frac{x_\alpha\,\tilde{\eta}_\alpha}{|\,\mathrm{x}\,|}\right) d\tilde{\omega}\,.$$

Дифференцирование (12) по x_l дает

$$(13)\qquad \sqrt{8\pi}\ |\,\mathrm{x}\,|^3\ u_{k,l}(x, t) = -\,x_l \int_{\tilde{\omega}} \tilde{u}_k(\tilde{\eta}, t)\,\delta\left(\frac{x_\alpha\,\tilde{\eta}_\alpha}{|\,\mathrm{x}\,|}\right) d\tilde{\omega}\ +$$

$$+ \int_{\tilde{\omega}} \tilde{u}_k(\tilde{\eta}, t)\ \delta'\left(\frac{x_\alpha\,\tilde{\eta}_\alpha}{|\,\mathrm{x}\,|}\right) [\,\tilde{\eta}_l\,|\,\mathrm{x}\,| - x_l\, x_\alpha\, \tilde{\eta}_\alpha |\,\mathrm{x}\,|^{-1}\,]\,d\tilde{\omega}\,.$$

Здесь δ' – производная дельта-функции по своему аргументу. Интегрируя (13) по $\tilde{\nu}$ с учетом определения дельта-функции и ее производных [12], а также соотношения

$$\left.\frac{\partial\tilde{\eta}_m}{\partial\tilde{\nu}}\right|_{\nu=0} = \frac{x_m}{|\,\mathrm{x}\,|}\,,$$

получим

$$(14)\quad \sqrt{8\pi}\, u_{k,l}(\mathrm{x},\ t) =$$

$$= -\frac{x_l}{|\mathrm{x}|^3}\int_0^{2\pi}\widetilde{u}_k(0,\ \widetilde{\varphi},\ t)\ d\widetilde{\varphi} - \frac{x_m}{|\mathrm{x}|^3}\int_0^{2\pi}\widetilde{u}_{k,m}(0,\ \widetilde{\varphi},\ t)\ \widetilde{\eta}_l d\widetilde{\varphi}.$$

Чтобы вычислить $\widetilde{u}_{k,m} = \partial\widetilde{u}_k(\widetilde{\eta}, t)/\partial\widetilde{\eta}_m$, положим в уравнении (5) $\widetilde{\mathrm{x}} = \widetilde{\eta}$, после чего продифференцируем его по $\widetilde{\eta}_m$. Тогда

$$\frac{\partial\widetilde{u}_k(\widetilde{\eta}, t)}{\partial\widetilde{\eta}_m} = -\widetilde{\mathrm{c}}_{kl}^{-1}\ \widetilde{\mathrm{c}}_{ip,m}\,\widetilde{u}_p(\widetilde{\eta},\ t),$$

где $\quad \widetilde{\mathrm{c}}_{ip,m} = (\delta_{jm}\,\widetilde{\eta}_l + \delta_{lm}\,\widetilde{\eta}_j)\ \mathrm{c}_{ijpl}.$

Подставим (14) в (1), после чего приведем выражения для смещений и напряжений к виду, удобному для программной реализации:

$$(15)\quad u_k(\mathrm{x}, t) = \frac{1}{8\pi^2|\mathrm{x}|}\oint_{\zeta\in\Pi(\mathrm{x})}[\widetilde{\mathrm{c}}_{ki}^{-1}(\zeta) f_i](t)\,|d\zeta|,$$

$$(16)\quad \sigma_{ij}(\mathrm{x}, t) = \frac{\mathrm{c}_{ijkl}}{8\pi^2|\mathrm{x}|^3}\left\{-x_l\oint_{\zeta\in\Pi(x)}[\widetilde{\mathrm{c}}_{kq}^{-1}(\zeta) f_q](t)\,|d\zeta| + \right.$$

$$\left. + x_m\oint_{\zeta\in\Pi(\mathrm{x})}[\widetilde{\mathrm{c}}_{ks}^{-1}(\zeta)\ \widetilde{\mathrm{c}}_{sp,m}(\zeta)\ \widetilde{\mathrm{c}}_{pq}^{-1}(\zeta) f_q](t)\ \zeta_l\,|d\zeta|\right\}.$$

Здесь $\Pi(\mathrm{x})$ — плоскость, ортогональная вектору x. Вектор ζ удовлетворяет условию $|\zeta| = 1$, и, таким образом, интеграл вычисляется вдоль единичной окружности, лежащей в плоскости $\Pi(\mathrm{x})$. Частным случаем (15), (16) являются фундаментальные решения для сред с разностными ядрами, приведенные в [7, 8]. Примеры численной реализации алгоритма вычисления фундаментального решения при отсутствии наследственности в средах с прямолинейной анизотропией даны в работах [4, 13, 14].

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
14 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н.* – ЖЭТФ, 1947, т. 17, вып. 9. 2. *Synge J.L.* The hypercircle in mathematical physics. Cambridge, 1957. 3. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 4. *Осокин А.Е., Перлин П.И.* Тр. МФТИ. Сер аэрофиз. и прикл. матем. М., 1980, с. 14–18. 5. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 6. *Хуторянский Н.М.* – Прикл. пробл. прочн. и пластичн., 1979, № 10. 7 *Осокин А.Е.* Аэрофизика и геокосмические исследования. Междувед. сб. М., 1982, с. 61–62. 8. *Осокин А.Е.* Аэрофизика и прикладная математика. М., 1981, с. 67–68. 9. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Наука, 1952. 10. *Арутюнян Н.Х.* Препринт ИПМ АН СССР, № 170, М., 1981. 11. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 12. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 13. *Vogel S.M., Rizzo F.J.* – J. Elasticity, 1973, vol. 3, p. 3. 14. *Wilson R.B., Gruse T.A.* – Intern. Numer. Methods in Eng., 1978, vol. 12, p. 10.