

УДК 539.389.3

СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОМ.  
НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОМ СТАРЕЮЩЕМ ТЕЛЕ  
С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

МИХАЙЛОВ С. Е.

В работах последних десятилетий (см. [1–6]) широко исследовано поведение решений задач теории упругости в окрестности особых точек в двумерных и особых линий в трехмерных телах. В [7–8] изучалась асимптотика решений общих краевых задач для уравнений в частных производных в окрестности особых точек. В [9–10] дана асимптотика напряженно-деформированного состояния около края трещины в стареющем наследственно упругом теле.<sup>1</sup> Одним из общих методов таких исследований является решение при помощи интегральных преобразований задачи о бесконечном двумерном клине и затем распространение с использованием срезающей функции полученных результатов на тела произвольной формы с особыми точками.

В публикуемой работе такая методика применяется к изучению асимптотики напряжений в угловой точке изотропного стареющего наследственно упругого тела. Показано, что при заданных в окрестности угловой точки усилиях степень сингулярности напряжений не зависит от наследственных операторов и времени и определяется лишь геометрией. При заданных смещениях или смешанных граничных условиях получены степени сингулярности и явные выражения членов асимптотики для ряда частных случаев: некоторых величин углов, предельных времен, а также для случая установившихся колебаний. При произвольных углах раствора получены оценки роста членов асимптотики для любого момента времени.

1. Обобщенный закон Гука для рассматриваемого тела имеет вид [11, 12]<sup>2</sup>

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \lambda = \lambda_0(t) + \lambda^*, \quad (\lambda^* f)(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

$$\mu = \mu_0(t) + \mu^*, \quad (\mu^* f)(t) = \int_{-\infty}^t \mu(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

где  $\lambda_0(t)$ ,  $\mu_0(t)$ ,  $\lambda(t, \tau)$ ,  $\mu(t, \tau)$  — известные функции, тождественный оператор обозначается единицей. Если воздействие начинается в момент  $t=0$ , нижний предел интегрирования в этих формулах можно заменить нулем. Везде далее нулевым индексом помечаются внеинтегральные члены операторов, звездочкой — интегральные.

Учитывая независимость функций  $\lambda_0$ ,  $\lambda$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu$  от пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , и следующую отсюда возможность перестановки операторов  $\lambda$  и  $\mu$  с дифференцированием по координатам, можно повторить выкладки, проведенные в [13] для классической теории упругости, считая теперь  $\lambda$  и  $\mu$  некоммутирующими наследственными операторами. В результате легко показать, что в случае плоской деформации или плоского

<sup>1</sup> Асимптотика напряжений и смещений в угловой точке в наследственно упругом теле без старения для ряда частных геометрий и предельных времен получена С. А. Дуниным и С. Е. Михайловым (О сингулярности напряжений в плоском наследственно упругом теле с угловыми точками. — В кн.: Всес. симпозиум «Ползучесть в конструкциях»: Тез. докл. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1982, с. 36–37.)

<sup>2</sup> См. также: Арутюнян Н. Х. Теория ползучести неоднородно стареющих тел. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 170, 76 с.

напряженного состояния будут верны представления Колосова — Мусхелишвили [13], дающие решение системы уравнений Ламе при отсутствии массовых сил, с заменой в них упругих постоянных соответствующими наследственными операторами

$$\begin{aligned} u_x + iu_y &= \mu^{-1} [\kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] / 2 \\ \sigma_x &= \operatorname{Re} [2\varphi'(z) - \bar{z} \varphi''(z) - \psi'(z)] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_y = \operatorname{Re} [2\varphi'(z) + \bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)], \quad \tau_{xy} = \operatorname{Im} [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]$$

Для случая плоской деформации  $\sigma_z = 4\nu \operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ .

Здесь оператор  $\kappa = 3 - 4\nu$  в случае плоской деформации и  $\kappa = (3 - \nu) \times (1 + \nu)^{-1}$  в случае плоского напряженного состояния; операторный коэффициент Пуассона  $\nu = \frac{1}{2} \lambda (\lambda + \mu)^{-1}$ ;  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  — аналитические функции комплексного аргумента  $z = x + iy$ , зависящие также от времени  $t$ .

Введем обозначения  $z_1 = z = r a_1(\theta)$ ,  $z_2 = \bar{z} = r a_2(\theta)$ ,  $a_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $a_2 = -\bar{a}_1$ ,  $\varphi_1(z_1) = \varphi(z)$ ,  $\varphi_2(z_2) = \overline{\varphi(z)}$ ,  $\psi_1(z_1) = \psi(z)$ ,  $\psi_2(z_2) = \overline{\psi(z)}$ ,  $\Phi_i(z_i) = \varphi_i'(z_i)$ ,  $\Psi_i(z_i) = \psi_i'(z_i)$ , где  $r, \theta$  — полярная система координат, штрихи обозначают производные аналитических функций  $\varphi_j(z_j)$ ,  $\psi_j(z_j)$  по своим аргументам. Тогда формулы Колосова — Мусхелишвили в полярных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{4} \mu^{-1} \sum_{j=1}^2 [a_{3-j} \kappa \varphi_j - a_{3-j} z_j \varphi_j' - a_j \psi_j] \\ u_\theta &= \frac{i}{4} \mu^{-1} \sum_{j=1}^2 (-1)^j [a_{3-j} \kappa \varphi_j + a_{3-j} z_j \varphi_j' + a_j \psi_j] \\ \sigma_r &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 [2\varphi_j' - z_j \varphi_j'' - a_j^2 \psi_j'] \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 [2\varphi_j' + z_j \varphi_j'' + a_j^2 \psi_j'] \quad \tau_{r\theta} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j [z_j \varphi_j'' + a_j^2 \psi_j'']$$

Будем определять напряженно-деформированное состояние бесконечного клина ( $0 < r < \infty$ ,  $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ ) для трех случаев.

На обеих гранях заданы смещения (задача I—I):

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta_0, t) &= f_1(r, t), \quad u_\theta(r, -\theta_0, t) = f_2(r, t), \quad u_r(r, \theta_0, t) = f_3(r, t), \\ u_\theta(r, \theta_0, t) &= f_4(r, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

На обеих гранях заданы усилия (задача II—II):

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r, -\theta_0, t) &= g_1(r, t), \quad \tau_{r\theta}(r, -\theta_0, t) = g_2(r, t), \quad \sigma_\theta(r, \theta_0, t) = g_3(r, t), \\ \tau_{r\theta}(r, \theta_0, t) &= g_4(r, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

На одной из граней клина заданы усилия, а на другой — смещения (задача II—I):

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r, -\theta_0, t) &= g_1(r, t), \quad \tau_{r\theta}(r, -\theta_0, t) = g_2(r, t), \quad u_r(r, \theta_0, t) = f_3(r, t), \\ u_\theta(r, \theta_0, t) &= f_4(r, t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Меллина. Пусть функция  $h(r)$  удовлетворяет условиям

$$h(r) = O(r^{-\alpha-\varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad h(r) = O(r^{-\beta+\varepsilon}), \quad (r \rightarrow \infty), \quad \alpha < \beta, \quad h(r) \in L(\varepsilon_0, \varepsilon_\infty) \quad (1.6)$$

для любых  $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$  таких что  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_\infty < \infty$  и любого  $\varepsilon > 0$ .

Тогда в полосе  $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$  определено преобразование Меллина функции  $h(r)$ , а ее трансформанта  $\langle h \rangle(s) = \int_0^{\infty} h(r) r^{s-1} dr$ . Обратное преобразование имеет вид

$$h(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle h \rangle(s) r^{-s} ds \quad (\alpha < c < \beta) \quad (1.7)$$

Приведем для случая комплекснозначной функции  $h(z)$  одно утверждение из [14], которое будет существенно использовано в дальнейшем.

*Теорема 1.* Пусть  $h(z)$  — аналитическая функция аргумента  $z = re^{i\theta}$ , регулярная в угле  $D: (\theta_1 < \theta < \theta_2)$  и  $h(z) = O(r^{-\alpha-\varepsilon})$  ( $r \rightarrow 0$ ),  $h(z) = O(r^{-\beta+\varepsilon})$  ( $r \rightarrow \infty$ ) равномерно в любом угле, внутреннем к  $D$  для некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ , таких что  $\alpha < \beta$ , и любого  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$h^\sim(s) = \int_0^{\infty} h(z) z^{s-1} dz \quad (1.8)$$

есть аналитическая функция  $s$ , регулярная в полосе  $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$

$$h^\sim(s) = O(\exp[(-\theta_1 - \varepsilon) \operatorname{Im} s]) \quad (\operatorname{Im} s \rightarrow -\infty), \quad h^\sim(s) = O(\exp[(-\theta_2 + \varepsilon) \operatorname{Im} s]) \quad (\operatorname{Im} s \rightarrow \infty)$$

для любого  $\varepsilon > 0$  равномерно в любой полосе, внутренней к полосе  $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$ , причем

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h^\sim(s) z^{-s} ds \quad (\alpha < c < \beta) \quad (1.9)$$

Обратно, если  $h^\sim(s)$  — заданная функция, удовлетворяющая указанным условиям, то функция  $h(z)$ , определенная формулой (1.9), удовлетворяет наложенным на нее выше условиям и имеет место формула (1.8).

Обычная трансформанта Меллина  $\langle h \rangle(s, \theta)$  аналитической функции  $h(z)$ , удовлетворяющей условиям теоремы 1, тогда представима в виде

$$\langle h \rangle(s, \theta) = \int_0^{\infty} h(ra_1(\theta)) r^{s-1} dr = a_1^{-s}(\theta) h^\sim(s)$$

где функция  $h^\sim(s)$  из (1.8) от угла  $\theta$  уже не зависит. Обратное преобразование для  $\langle h \rangle(s, \theta)$  будет иметь вид (1.7) или, что то же самое, (1.9).

Пусть заданные функции  $g_i$  и производные  $f_i' = \partial f_i / \partial r$  удовлетворяют условиям (1.6) для некоторого  $\alpha = \alpha_1 < 1$  и  $\beta = 1$  (условие 1).

Будем искать решения задач (I—I), (II—II) и (II—I) такие, что напряжения  $\sigma_{ij}$  удовлетворяют условиям (1.6) для некоторого  $\alpha < 1$  и  $\beta = 1$  (условие 2).

Условие 2 в нуле гарантирует ограниченность накопленной упругой энергии в любой ограниченной части клина, а условие на бесконечности, как будет видно из хода решения, обеспечивает существование и единственность решения. Когда исследуется асимптотика решения в произвольном двумерном теле с угловой точкой, то в соответствующей модельной задаче для бесконечного клина эти условия будут выполнены. Если условие 2 удовлетворено, то для функций  $\Phi_j(z_j)$  и  $\Psi_j(z_j)$  выполнены условия теоремы 1 с теми же  $\alpha$  и  $\beta$ , и для определения этих функций применим

преобразование Меллина к соотношениям Колосова — Мухелишвили (1.2) и граничным условиям (1.3)–(1.5) (предварительно для удобства про- дифференцировав по  $t$  соотношения для смещений).

После подстановки преобразованных соотношений (1.2) в преобразо- ванные граничные условия (1.3)–(1.5) получим для определения транс- формант  $\Phi_j^\sim, \Psi_j^\sim$  в каждой из задач свою систему линейных операторных уравнений.

Для задачи (I–I):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 (\kappa-1+s) a_j^{-s} (-\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) - \sum_{j=1}^2 a_j^{2-s} (-\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= 4[\mu \langle f_1' \rangle](s, t) \\ \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\kappa+1-s) a_j^{-s} (-\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) + \\ + \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j^{2-s} (-\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= -4i[\mu \langle f_2' \rangle](s, t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 (\kappa-1+s) a_j^{-s} (\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) - \sum_{j=1}^2 a_j^{2-s} (\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= 4[\mu \langle f_3' \rangle](s, t) \\ \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\kappa+1-s) a_j^{-s} (\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) + \\ + \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j^{2-s} (\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= -4i[\mu \langle f_4' \rangle](s, t) \end{aligned}$$

Для задачи (II–II):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 (2-s) a_j^{-s} (-\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) + \sum_{j=1}^2 a_j^{2-s} (-\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= 2 \langle g_1 \rangle(s, t) \\ \sum_{j=1}^2 (-1)^j s a_j^{-s} (-\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) - \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j^{2-s} (-\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= 2i \langle g_2 \rangle(s, t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 (2-s) a_j^{-s} (\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) + \sum_{j=1}^2 a_j^{2-s} (\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= 2 \langle g_3 \rangle(s, t) \\ \sum_{j=1}^2 (-1)^j s a_j^{-s} (\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) - \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j^{2-s} (\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= 2i \langle g_4 \rangle(s, t) \end{aligned}$$

Для задачи (II–I):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 (2-s) a_j^{-s} (-\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) + \sum_{j=1}^2 a_j^{2-s} (-\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= 2 \langle g_1 \rangle(s, t) \\ \sum_{j=1}^2 (-1)^j s a_j^{-s} (-\theta_0) \Phi_j^\sim(s, t) - \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j^{2-s} (-\theta_0) \Psi_j^\sim(s, t) &= 2i \langle g_2 \rangle(s, t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\sum_{j=1}^2 (\kappa-1+s) a_j^{-s} (\theta_0) \Phi_j^{\sim}(s, t) - \sum_{j=1}^2 a_j^{2-s} (\theta_0) \Psi_j^{\sim}(s, t) = 4[\mu\langle f_s' \rangle](s, t)$$

$$\sum_{j=1}^2 (-1)^j (\kappa+1-s) a_j^{-s} (\theta_0) \Phi_j^{\sim}(s, t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j^{2-s} (\theta_0) \Psi_j^{\sim}(s, t) = -4i[\mu\langle f_i' \rangle](s, t)$$

Далее решаем полученные системы, не учитывая, что  $\Phi_1(z_1) = \overline{\Phi_2(z_2)}$ ,  $\Psi_1(z_1) = \overline{\Psi_2(z_2)}$ . Эти соотношения будут следствием действительности функций  $f_i, g_i$ . Решения систем (1.10) – (1.12) имеют вид

$$\Phi_h^{\sim}(s, t) = \Delta^{-1}(s, \kappa) \sum_{j=1}^4 A_{jh}(s, \kappa) T_j, \quad \Psi_h^{\sim}(s, t) = \Delta^{-1}(s, \kappa) \sum_{j=1}^4 A_{j,h+2}(s, \kappa) T_j$$

(1.13)

Здесь операторы  $A_{jh}(s, \kappa)$  – алгебраические дополнения элементов матрицы системы (1.10), (1.11) или (1.12); операторы  $\Delta(s, \kappa)$  – определители матриц этих систем, которые могут быть вычислены в явном виде.

Для задачи (I–I):

$$T_1(s, t) = 4[\mu\langle f_1' \rangle](s, t), \quad T_2(s, t) = -4i[\mu\langle f_2' \rangle](s, t), \quad T_3(s, t) = 4[\mu\langle f_3' \rangle](s, t)$$

$$T_4(s, t) = -4i[\mu\langle f_4' \rangle](s, t), \quad \Delta = 16\{(1-s)^2 \sin^2 2\theta_0 - \kappa^2 \sin^2 [2\theta_0(1-s)]\}$$

(1.14)

Для задачи (II–II):

$$T_1(s, t) = 2\langle g_1 \rangle(s, t), \quad T_2(s, t) = 2i\langle g_2 \rangle(s, t), \quad T_3(s, t) = 2\langle g_3 \rangle(s, t)$$

$$T_4(s, t) = 2i\langle g_4 \rangle(s, t), \quad \Delta = 16\{(1-s)^2 \sin^2 2\theta_0 - \sin^2 [2(1-s)\theta_0]\}$$

(1.15)

Для задачи (II–I):

$$T_1(s, t) = 2\langle g_1 \rangle(s, t), \quad T_2(s, t) = 2i\langle g_2 \rangle(s, t)$$

$$T_3(s, t) = 4[\mu\langle f_3' \rangle](s, t), \quad T_4(s, t) = -4i[\mu\langle f_4' \rangle](s, t)$$

(1.16)

$$\Delta = 16\{(1-s)^2 \sin^2 2\theta_0 + \kappa \sin^2 [2(1-s)\theta_0] - 1/4(1+\kappa)^2\}$$

Для окончательного решения задач и определения напряжений и смещений в любой момент времени необходимо обратить преобразование Меллина, однако наличие операторных членов  $\Delta^{-1}(\kappa, s)$  существенно затрудняет обращение при помощи теории вычетов, как это делается обычно. Исключения составляют те случаи, когда  $\Delta$  перестает по существу зависеть от оператора  $\kappa$ , либо когда  $\kappa$  вырождается в постоянную.

2. Рассмотрим задачу (II–II). В этом случае, как видно из (1.15),  $\Delta$  есть функция только от  $s$  и не является оператором, так как не зависит от оператора  $\kappa$ . Не зависят от  $\kappa$  также и функции  $A_{jh}(s)$ . Учитывая соотношения (1.13), (1.11), (1.15) вместе с условием 1, получаем, что функции  $\Phi_h^{\sim}(s, t)$ ,  $\Psi_h^{\sim}(s, t)$  определены в полосе  $\alpha_1 < \text{Re } s < 1$  и являются там мероморфными функциями параметра  $s$  с полюсами в точках нулей функции  $\Delta(s)$ , причем в этой полосе

$$\Phi_h^{\sim}, \Psi_h^{\sim} = O(\exp[(-\theta_0 + \varepsilon) \text{Im } s]) \quad (\text{Im } s \rightarrow \infty)$$

(2.1)

$$\Phi_h^{\sim}, \Psi_h^{\sim} = O(\exp[(\theta_0 - \varepsilon) \text{Im } s]) \quad (\text{Im } s \rightarrow -\infty), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Тогда в полосе  $\delta < \text{Re } s < 1$ ,  $\delta = \max(\max_{\text{Re } s_k < 1} (\text{Re } s_k), \alpha_1)$  выполнены усло-

вия второй части теоремы 1, следовательно

$$\Phi_k(z_k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Delta^{-1}(s) \sum_{j=1}^4 A_{jk}(s) T_j(s, t) z_k^{-s} ds \quad (\delta < c < 1) \quad (2.2)$$

и аналогичная формула имеет место для  $\Psi_k(z_k, t)$ . Кроме того

$$\Phi_k, \Psi_k = O(r^{-\delta-\varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad \Phi_k, \Psi_k = O(r^{-1+\varepsilon}) \quad (r \rightarrow \infty), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.3)$$

в угле  $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ . Таким образом, требуемое условие 2 выполняется для  $\alpha = \delta$ .

Переносим теперь контур интегрирования в (2.2) влево и вычисляя вычеты подынтегрального выражения в точках нулей  $s_k$  функции  $\Delta(s)$ , как того требует теорема Коши (которая применима вследствие (2.1)), и снова используя теорему 1, получаем

$$\Phi_k(z_k, t) = \sum_{\alpha_1 < \operatorname{Re} s_m < 1} \operatorname{res}_{s=s_m} \left[ \Delta^{-1}(s) \sum_{j=1}^4 A_{jk}(s) T_j(s, t) z_k^{-s} \right] + \Phi_{k0}(z_k, t) = \quad (2.4)$$

$$= \sum_{\alpha_1 < \operatorname{Re} s_m < 1} z_k^{-s_m} \sum_{n=0}^{N_m-1} B_{kmn}(t) (\ln z_k)^n + \Phi_{k0}(z_k, t)$$

$$\Phi_{k0}(z_k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty} \Delta^{-1}(s) \sum_{j=1}^4 T_j z_k^{-s} ds = O(r^{-\alpha_1-\varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Аналогично

$$\Psi_k(z_k, t) = \sum_{\alpha_1 < \operatorname{Re} s_m < 1} z_k^{-s_m} \sum_{n=0}^{N_m-1} D_{kmn}(t) (\ln z_k)^n + \Psi_{k0}(z_k, t) \quad (2.5)$$

$$\Psi_{k0}(z_k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty} \Delta^{-1}(s) \sum_{j=1}^4 A_{j,k+2} T_j z_k^{-s} ds = O(r^{-\alpha_1-\varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Здесь  $N_m$  — кратность нуля функции  $\Delta(s)$  в точке  $s = s_m$ , а функция  $B_{kmn}(t)$ ,  $D_{kmn}(t)$  выражается через коэффициенты разложения известных из (1.13) функций  $\Phi_k^{\sim}(s, t)$ ,  $\Psi_k^{\sim}(s, t)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $s_m$ , и их можно выписать в явном виде.

Выражения для напряжений имеют вид, аналогичный (2.4), (2.5). Выпишем, к примеру, напряжение  $\sigma_r$ , полученное подстановкой (2.4), (2.5) в (1.2)

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{\alpha_1 < \operatorname{Re} s_m < 1} z_k^{-s_m} \left\{ \sum_{n=0}^{N_m-1} (\ln z_k)^n [B_{kmn}(t) (2+s_m) - a_k^2(\theta) D_{kmn}(t)] - \right. \quad (2.6)$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{N_m-1} n (\ln z_k)^{n-1} B_{kmn}(t) \right\} + \sigma_{r0}, \quad \sigma_{r0} = O(r^{-\alpha_1-\varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Выражение для смещения  $u_r$  имеет вид

$$u_r = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{\alpha_1 < \operatorname{Re} s_m < 1} z_k^{1-s_m} \sum_{n=0}^{N_m-1} \left\{ -a_{s-h}(\theta) (\ln z_k)^n [\mu^{-1} B_{kmn}](t) + \right. \quad (2.7)$$

$$+ \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!} (s_m - 1)^{p-n-1} (\ln z_h)^p [a_h(\theta) [\mu^{-1} D_{kmn}] (t) - \\ - a_{s-h}(\theta) [\mu^{-1} \kappa B_{kmn}] (t)] \} + u_{r0}, \quad \frac{\partial u_{r0}}{\partial r} = O(r^{-\alpha_1 - \varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Смещение  $u_0$  будет представляться аналогично. Если в условии 1 параметр  $\alpha_1 < 0$ , т. е. приложенные усилия стремятся к нулю, то сингулярность напряжений в вершине клина определяется только нулями определителя  $\Delta$ , соответствующего задаче (II-II), в полосе  $0 \leq \operatorname{Re} s < 1$ . Если этих нулей нет, то напряжения и деформации, как следует из (2.4)–(2.7), ограничены в угловой точке. В противном случае они имеют там особенности вида  $r^{-s_k}$ , умноженные на  $(\ln r)^{N_k-1}$ , если нуль  $s_k$  имеет кратность  $N_k$ . Если приложенные усилия имеют степенные особенности, то особенности такого же порядка добавляются к разложениям (2.4)–(2.7).

Итак, в задаче (II-II) для стареющего наследственно упругого клина асимптотика напряжений и смещений в его вершине будет той же, что и для ненаследственного тела, с той лишь разницей, что обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений  $B_{kmn}$ ,  $D_{kmn}$  при сингулярном члене будут меняться во времени, а коэффициенты в асимптотике смещений выражаются через них при помощи наследственных операторов.

3. Рассмотрим далее задачи (I-I) и (II-I). Пусть оператор  $\kappa$  не является наследственным, т. е. вырождается в умножение на функцию  $\kappa_0(t)$  (это будет в том случае, когда коэффициент Пуассона материала не является наследственным,  $\nu = \nu_0(t)$ ). Тогда те же рассуждения, что и в п. 2, приводят к выражениям (2.4)–(2.7), в которых в качестве  $\Delta$ ,  $A_{jk}$ ,  $s_m$  и  $T_j$  берутся величины для соответствующих задач. Таким образом, если  $\nu$  не является наследственным оператором, то асимптотика для напряжений и смещений в окрестности угловой точки в задачах (I-I) и (II-I) будет той же, что и для ненаследственного материала с тем же коэффициентом Пуассона, а коэффициенты интенсивности напряжений  $B_{kmn}$ ,  $D_{kmn}$ , зависящие от  $g_i(r, t)$ ,  $[\mu f_i](r, t)$  будут функциями времени.

4. Пусть теперь  $\kappa$  — общий временной оператор. Рассмотрим некоторые частные геометрии клина:  $\theta_0 = \pi/2$  или  $\theta_0 = \pi$ , то есть случай полуплоскости или случай полубесконечной трещины в бесконечной плоскости. Тогда для задачи (I-I)

$$\Delta = \kappa^2 \Delta_1(s), \quad \Delta_1(s) = -16 \sin^2 [2\theta_0(1-s)]$$

Подстановка в (1.13) дает

$$\Phi_k^\vee(s, t) = \Delta_1^{-1}(s) \sum_{j=1}^k A_{jk}(s, \kappa) \kappa^{-2} T_j,$$

$$\Psi_k^\vee(s, t) = \Delta_1^{-1}(s) \sum_{j=1}^k A_{j,k+2}(s, \kappa) \kappa^{-2} T_j$$

Учитывая, что  $\Delta_1^{-1}(s)$  не является оператором, а функции  $[A_{jk}(s, \kappa) \kappa^{-2} T_j](s, t)$  есть голоморфные функции от  $s$  в полосе  $\alpha_1 < \operatorname{Re} s < 1$ , и проводя те же рассуждения, что и в п. 2, снова приходим для асимптотики напряжений и смещений к выражениям (2.4)–(2.7), в которых  $\Delta$  необходимо заменить на  $\Delta_1$ ,  $s_m$  — на корни  $\Delta_1(s) = 0$ ,  $T_j(s, t)$  — на  $[\kappa^{-2} T_j](s, t)$ , а под  $A_{jk}$  понимать операторы, зависящие от  $\kappa$ . Это приводит лишь к зависимости обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений  $B_{kmn}$ ,  $D_{kmn}$  от времени, оставляя асимптотику напряжений и смещений той же, что и для ненаследственной задачи при этой же гео-

метрии. Другими словами для задачи (I-I) в трещине будет особенность напряжений типа квадратного корня, а в полуплоскости, если заданные смещения — гладкие функции, особенность отсутствует.

5. Рассмотрим теперь случай общей геометрии для задач (I-I), (II-I).

5.1. Пусть воздействие приложено в момент  $t=0$ . Рассмотрим асимптотику напряжений и смещений при  $t \rightarrow +0$ . В этом случае оператор

$$\kappa = \kappa_0(t) + \kappa^*, \quad \kappa^* f = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

сводится к умножению на постоянную  $\kappa_0(0)$ , и опять повторяя рассуждения п. 2, получаем асимптотику (2.4)–(2.7), в которой  $\Delta$ ,  $A_{kj}$  и  $T_j$  относятся к соответствующим задачам, а фигурирующие в выражениях для этих параметров операторы  $\kappa$ ,  $\mu$  заменяются постоянными  $\kappa_0(0)$ ,  $\mu_0(0)$ . В этом случае асимптотика будет той же, что и для ненаследственного тела с упругими постоянными Ламе  $\lambda_0(0)$ ,  $\mu_0(0)$ .

5.2. Пусть снова воздействие приложено при  $t=0$ . Рассмотрим асимптотику в момент времени  $t=t^0$ ,  $0 \leq t^0 < \infty$ . Пусть сначала  $\kappa_0(t) = \text{const} \neq 0$  (в частности, это будет иметь место для нестареющих наследственно упругих материалов). В этом случае, учитывая обратимость оператора Вольterra второго рода на конечном отрезке, получаем, что функции  $\Phi_k^{\sim}(s, t)$  и  $\Psi_k^{\sim}(s, t)$ , определяемые выражениями (1.13), будут аналитическими функциями параметра  $s$  в полосе  $\alpha_1 < \text{Re } s < 1$  регулярности трансформант граничных условий  $T_i$ . В этой полосе данные функции будут иметь конечное число особых точек, не являющихся, вообще говоря, полюсами конечного порядка, в которых равны нулю внеинтегральные члены операторов  $\Delta(s, \kappa)$  задач (I-I) и (II-I), т. е. соответствующие функции  $\Delta(s, \kappa_0)$ . Эти особые точки совпадают с особыми точками, соответствующими времени  $t=0$  (п. 5.1). Таким образом, в полосе

$$\delta < \text{Re } s < 1, \quad \delta = \max_{\text{Re } s_k < 1} [\max (\text{Re } s_k), \alpha_1] \quad (5.1)$$

где  $s_k$  — нули определителя  $\Delta(s, \kappa_0)$ , функции  $\Phi_k^{\sim}(s, t)$ ,  $\Psi_k^{\sim}(s, t)$  регулярны по  $s$ . Для изучения их поведения при  $\text{Im } s \rightarrow \pm \infty$  представим  $\Delta(s, \kappa)$  в виде

$$\Delta(s, \kappa) = \Delta(s, \kappa_0(0)) \Delta_2(s, \kappa) \quad (5.2)$$

Здесь  $\Delta(s, \kappa_0)$  уже не является оператором и при  $\text{Im } s \rightarrow \pm \infty$  для задачи (I-I)  $\Delta_2(s, \kappa) \rightarrow \kappa^2 / \kappa_0^2(0)$ , а для задачи (II-I)  $\Delta_2(s, \kappa) \rightarrow \kappa / \kappa_0(0)$ .

Отсюда следует, что оператор  $\Delta_2^{-1}(s, \kappa)$  остается ограниченным при  $\text{Im } s \rightarrow \pm \infty$ , если ограниченным является оператор  $\kappa^{-1}$ , а для  $\Phi_k^{\sim}$ ,  $\Psi_k^{\sim}$  имеют место оценки (2.1). Таким образом, функции  $\Psi_k^{\sim}(s, t^0)$  и  $\Phi_k^{\sim}(s, t^0)$  удовлетворяют в полосе  $\delta < \text{Re } s < 1$  условиям теоремы 1, и для  $\Phi_k(z_k, t^0)$ ,  $\Psi_k(z_k, t^0)$  получаем представление (2.2) и оценки (2.3), в которых параметр  $\delta$  определен соотношением (5.1). Передвигая контур интегрирования в (2.2) влево и учитывая, как и в п. 2, вычеты в нулях функции  $\Delta(s, \kappa_0)$ , получаем представление

$$\Phi_k(z_k, t^0) = \sum_{1 - \alpha_1 < \text{Re } s_m < 1} \Phi_k^{(m)}(z_k, t^0) + \Phi_k^{(0)}(z_k, t^0)$$

и аналогичные соотношения для  $\Psi_k(z_k, t^0)$ .

В рассматриваемом случае явные выражения для вычетов получить затруднительно. Однако, принимая во внимание, что при перенесении контура интегрирования через особую точку (нуль функции  $\Delta(s, \kappa_0)$ ), т. е. при смене полосы регулярности функций  $\Phi_k^{\sim}$ ,  $\Psi_k^{\sim}$ , скачком меняют-



ся параметры  $\alpha$  и  $\beta$  теоремы 1, получаем, что внутри угла  $-\theta_0 < \theta < \theta_0$

$$\Phi_k^{(m)}(z_k, t^0), \quad \Psi_k^{(m)}(z_k, t^0) = O(r^{-\operatorname{Re} s_m - \varepsilon}),$$

$$\Phi_k^{(0)}(z_k, t^0), \quad \Psi_k^{(0)}(z_k, t^0) = O(r^{-\alpha_1 - \varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Подставляя эти соотношения в выражения для напряжений (1.1), будем иметь

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t^0) = \sum_{\alpha_1 < \operatorname{Re} s_m < 1} \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma_{ij}^{(0)}, \quad \sigma_{ij}^{(m)}(r, \theta, t^0) = O(r^{-\operatorname{Re} s_m - \varepsilon}), \quad (5.3)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}(r, \theta, t^0) = O(r^{-\alpha_1 - \varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Эти оценки, как видно, не зависят от времени  $t^0$ , если  $\kappa_0 = \text{const}$ .

Рассмотрим теперь общий случай асимптотики в момент времени  $t = t^0 < \infty$ , когда воздействие приложено при  $t = 0$  и  $\kappa_0(t)$  — функция времени при  $0 \leq t \leq t^0$ . Тогда функции  $\Phi_k^\sim(s, t^0)$ ,  $\Psi_k^\sim(s, t^0)$  будут аналитическими по  $s$  в той же полосе  $\alpha_1 < \operatorname{Re} s < 1$ , а их особые точки находятся среди точек  $s$ , в которых при каком-либо  $t \in [0, t^0]$  внеинтегральный член оператора  $\Delta(s, \kappa)$  обращается в нуль. Разлагая, как и выше, оператор  $\Delta$  по формуле (5.2), получаем, что особые точки функций  $\Phi_k^\sim(s, t^0)$ ,  $\Psi_k^\sim(s, t^0)$  принадлежат криволинейным отрезкам на плоскости  $s$ , параметрическое уравнение которых имеет вид  $\Delta(s(t), \kappa_0(t)) = 0$ ,  $0 \leq t \leq t^0$ , и в полосе  $\alpha_1 < \operatorname{Re} s < 1$  для функций  $\Phi_k^\sim$  и  $\Psi_k^\sim$  имеют место оценки (2.1). Из (1.14), (1.16) можно видеть, что если  $\kappa_0(t) \geq 1$  и  $\theta_0 > 0$  в задаче (I—I) или  $\kappa_0(t) > 0$  в задаче (II—I) при  $0 \leq t \leq t^0$  (эти условия заведомо выполнены для реальных материалов, в которых  $\nu_0(t) \leq 1/2$ ), то выполняется строгое неравенство

$$\delta(t^0) = \max_{0 \leq t \leq t^0} \{ \max_{\operatorname{Re} s_k(t) < 1} [\operatorname{Re} s_k(t)], \alpha_1 \} < 1 \quad (5.4)$$

где  $s_k(t)$  — нули функции  $\Delta(s, \kappa_0(t))$ .

Отсюда следует, что в полосе  $\delta(t^0) < \operatorname{Re} s < 1$  для  $\Phi_k^\sim(s, t^0)$ ,  $\Psi_k^\sim(s, t^0)$  выполнены условия второй части теоремы 1 и, значит,

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t^0) = O(r^{-\delta(t^0) - \varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad -\theta_0 < \theta < \theta_0 \quad (5.5)$$

Если полосы сингулярности  $\min_{0 \leq t \leq t^0} [\operatorname{Re} s_k(t)] < \operatorname{Re} s < \max_{0 \leq t \leq t^0} [\operatorname{Re} s_k(t)]$

не перекрываются в пределах полосы  $\alpha_1 < \operatorname{Re} s < 1$  (это будет иметь место по крайней мере при достаточно малых  $t^0 \geq 0$ ), то соотношение (5.5) можно уточнить, приходя к оценкам (5.3), в которых  $\operatorname{Re} s_m$  необходимо заменить на  $\max_{0 \leq t \leq t^0} [\operatorname{Re} s_m(t)]$ .

5.3. Пусть воздействие приложено при  $t = 0$ . Рассмотрим асимптотику напряжений при  $t = \infty$ . Будем далее обозначать через  $C[0, \infty]$  пространство функций, непрерывных на полуоси и имеющих на бесконечности конечный предел, а через  $C[0, \infty)$  — пространство функций, непрерывных и равномерно ограниченных на полуоси, которые, однако, могут не иметь предела на бесконечности. В обоих пространствах норма  $\|f\| = \sup |f(t)|$  при  $0 \leq t < \infty$ .

Пусть некоторый оператор Вольтерра

$$(Kf)(t) = K_0(t)f(t) + \int_0^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

действует в пространстве функций, непрерывных на каждом конечном от-

резке. По лемме 2 из [16] он действует и ограничен в  $C[0, \infty)$ , если

$$K_0(t) \in C[0, \infty) \text{ и } \int_0^t |K(t, \tau)| d\tau < M < \infty$$

для всех  $t > 0$ .

Проводя рассуждения, близкие [15], покажем, что имеет место

*Лемма.* Если оператор  $K$  действует и ограничен в  $C[0, \infty)$ , имеются конечные пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t K(t, \tau) d\tau = K_{1\infty}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K_0(t) = K_0(\infty)$$

и существует функция  $m(\tau)$ , такая, что

$$\int_0^{\infty} |m(\tau)| d\tau = M_2 < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^a |K(t, \tau) - m(\tau)| d\tau = 0 \quad (5.6)$$

для любого  $a \in [0, \infty)$ , то для любой функции  $f(t) \in C[0, \infty]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Kf)(t) = K_{\infty} f(\infty) + \int_0^{\infty} m(\tau) [f(\tau) - f(\infty)] d\tau, \quad K_{\infty} = K_0(\infty) + K_{1\infty} \quad (5.7)$$

Действительно

$$\begin{aligned} \int_0^t K(t, \tau) f(\tau) d\tau &= f(\infty) \int_0^t K(t, \tau) d\tau + \int_0^t [f(\tau) - f(\infty)] m(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^{t^*} [f(\tau) - f(\infty)] [K(t, \tau) - m(\tau)] d\tau + \int_{t^*}^t [f(\tau) - f(\infty)] [K(t, \tau) - m(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

$(0 \leq t^* \leq t)$

При  $t \rightarrow \infty$  первый член стремится к  $f(\infty) K_{1\infty}$ , второй — к интегральному слагаемому в правой части (5.7). Докажем, что сумма двух последних членов стремится к нулю. Оценим четвертый член

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \sup_{t^* \leq \tau < \infty} |f(\tau) - f(\infty)| \int_{t^*}^t (|K(t, \tau)| + |m(\tau)|) d\tau \leq \\ &\leq \sup_{t^* \leq \tau < \infty} |f(\tau) - f(\infty)| (M + M_2) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

для любого  $\varepsilon > 0$ , если  $t^*$  достаточно велико, так как  $f(\tau) \rightarrow f(\infty)$ . Третий член

$$|I_3| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq t^*} |f(\tau) - f(\infty)| \int_0^{t^*} |K(t, \tau) - m(\tau)| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого  $\varepsilon > 0$  и  $t^*$  вследствие (5.6), если  $t$  достаточно велико. Итак, выбирая достаточно большим  $t^*$ , а по нему — достаточно большую величину  $t$ , можно добиться, чтобы  $|I_3| + |I_4| < \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Лемма доказана.

Отсюда следует, что оператор  $K$ , удовлетворяющий условию леммы, действует и ограничен в  $C[0, \infty]$ . Рассмотрим далее класс операторов, для

которых  $m(\tau) \equiv 0$ , и назовем их операторами с затухающей памятью. Нетрудно видеть, что действующий и ограниченный в  $C[0, \infty)$  оператор с разностным ядром действует и ограничен также и в пространстве  $C[0, \infty]$  (если  $K_0(t) \rightarrow K_0(\infty) \neq \pm\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ) и всегда является оператором с затухающей памятью.

Таким образом, если операторы наследственной упругости  $K, N$  — ограниченные в  $C[0, \infty]$  операторы с затухающей памятью, то, как и для операторов с разностными ядрами [12], их произведение является ограниченным в  $C[0, \infty]$  оператором с затухающей памятью и имеются длительные модули  $K_\infty, N_\infty$  такие, что  $(KNf)(\infty) = K_\infty(Nf)(\infty) = K_\infty N_\infty f(\infty)$ , т. е.  $(KN)_\infty = K_\infty N_\infty$ . Можно показать, что если функция  $f$  принадлежит области значений ограниченного оператора с затухающей памятью, то

$$(K^{-1}f)(\infty) = f(\infty)/K_\infty \quad (5.8)$$

В частности, если обратный оператор  $K^{-1}$  определен на всем пространстве  $C[0, \infty]$ , то соотношение (5.8) имеет место для любой функции  $f$  из этого пространства.

Пусть приложенные воздействия  $f_i, g_i$  принадлежат  $C[0, \infty)$  (или  $C[0, \infty]$ ) по времени для почти всех значений радиуса, а упругие операторы  $\mu^{-1}$  и  $\kappa$  являются ограниченными в  $C[0, \infty)$  ( $C[0, \infty]$ ). Будем далее считать, что в задаче I—I  $\|\kappa^*\| \leq \kappa_0(t) - 1$ ,  $\theta_0 > 0$ , а в задаче II—I  $\|\kappa^*\| < \kappa_0(t)$  для любого  $t \in [0, \infty)$

$$\|\kappa^*\| = \sup_{0 \leq t < \infty} \int_0^t |\kappa(t, \tau)| d\tau$$

Тогда анализ соотношений (1.14), (1.16) для операторов  $\Delta(\kappa, s)$  позволяет установить, что существует число  $\delta_\infty < 1$ , такое что в полосе  $\delta_\infty < \operatorname{Re} s < 1$  оператор  $\Delta(\kappa, s)$  имеет ограниченный обратный, следовательно, для любой функции из  $C[0, \infty)$  ( $C[0, \infty]$ ) функция  $\Delta^{-1}(\kappa, s)f$  регулярна по  $s$  в этой полосе. Условия, наложенные на  $\kappa$ , будут выполнены как для плоской деформации, так и для плоского напряженного состояния, если

$$0 < v_0(t), \quad \sup_{0 \leq t < \infty} v_0(t) + \|\nu^*\| \leq \frac{1}{2}, \quad \|\nu^*\| = \sup_{0 \leq t < \infty} \int_0^t |\nu(t, \tau)| d\tau \quad (5.9)$$

Рассмотрим случай, когда приложенные воздействия  $f_i, g_i \in C[0, \infty]$ , упругие наследственные операторы  $\mu^{-1}$  и  $\nu$  (а значит и  $\kappa$ ) — ограниченные в  $C[0, \infty]$  операторы с затухающей памятью. Тогда этим свойством обладает также оператор  $\Delta(\kappa, s)$ , а в полосе  $\delta_\infty < \operatorname{Re} s < 1$  для него имеет место формула (5.8), т. е.  $[\Delta^{-1}(s, \kappa)f](\infty) = f(\infty)/\Delta(s, \kappa_\infty)$ . Из (1.13) в этой полосе получаем

$$\Phi_k^\sim(s, \infty) = \Delta^{-1}(s, \kappa_\infty) \sum_{j=1}^4 A_{jk}(s, \kappa_\infty) T_j(s, \infty)$$

и аналогичное выражение для  $\Psi_k^\sim(s, \infty)$ . Эти соотношения аналитически продолжаются на всю полосу регулярности граничных условий  $\alpha_1 < \operatorname{Re} s < 1$ .

Снова проводя те же рассуждения, что и в п. 2, приходим к асимптотике (2.4) — (2.7), в которой  $\Delta, A_{jk}$  и  $T_j$  относятся к соответствующей задаче, а операторы  $\kappa$  и  $\mu$  заменены в них на постоянные  $\kappa_\infty$  и  $\mu_\infty$ , т. е. асимптотика для напряжений и смещений будет той же, что и для ненаследственного тела с упругими постоянными  $\kappa_\infty$  и  $\mu_\infty$ .

Откажемся теперь от довольно обременительного для стареющих материалов [15] условия затухающей памяти. Будем считать  $\nu$  и  $\kappa$  опера-

торами, действующими и ограниченными в  $C[0, \infty)$ , и потребуем, чтобы мгновенный коэффициент Пуассона  $\nu_0(t) \rightarrow \nu(\infty) \neq \pm\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\sigma(\kappa^*)$  — спектр оператора  $\kappa^*$  в  $C[0, \infty)$ , т. е. для любого комплексного числа  $\gamma \notin \sigma(\kappa^*)$  оператор  $[\kappa^* - \gamma]$  имеет ограниченный обратный в этом пространстве, а для любого  $\gamma \in \sigma(\kappa^*)$  — не имеет. Используя теорему 2 [16], получаем, что для любой функции  $f \in C[0, \infty)$  спектр оператора  $f(t)\kappa^*$  равен  $\sigma[f(t)\kappa^*] = f(\infty)\sigma(\kappa^*)$ . Учитывая это и представляя оператор  $\Delta(s, \kappa)$  для задач I—I и II—I, как полином от  $\kappa$  в виде произведения двух сомножителей, в каждый из которых оператор  $\kappa$  входит в первой степени, нетрудно видеть, что для всех  $s$ , не являющихся корнями уравнения  $\Delta(s, \kappa_0(\infty) + \gamma) = 0$  для какого-либо числа  $\gamma \in \sigma(\kappa^*)$  или уравнения  $\Delta(s, \kappa_0(t)) = 0$  для какого-либо  $t \in [0, \infty)$ , оператор  $\Delta^{-1}(s, \kappa)$  является ограниченным и, следовательно, для любой функции  $f(t) \in C[0, \infty)$  функция  $\Delta^{-1}(s, \kappa)f$  регулярна по  $s$  и ограничена равномерно по  $t \in [0, \infty)$ . Если выполнены условия, наложенные выше на  $\kappa$  или условия (5.7), то это будет иметь место в некоторой полосе  $\delta_\infty < \operatorname{Re} s < 1$ .

Нижняя оценка для  $\delta_\infty$  имеет вид

$$\delta_\infty = \max(\delta_{1\infty}, \delta_{2\infty}), \quad \delta_{1\infty} = \sup_{\gamma \in \sigma(\kappa^*), \operatorname{Re} s_{h\infty}(\gamma) < 1} [\operatorname{Re} s_{h\infty}(\gamma)],$$

$$\Delta(s_{h\infty}(\gamma), \kappa_0(\infty) + \gamma) = 0 \quad (5.10)$$

$$\delta_{2\infty} = \sup_{0 \leq t < \infty, \operatorname{Re} s_h(t) < 1} [\operatorname{Re} s_h(t)], \quad \Delta(s_h(t), \kappa_0(t)) = 0$$

Учитывая представления (5.2), как и в п. 5.2, получаем, что в полосе  $\delta(\infty) < \operatorname{Re} s < 1$  имеют место оценки (2.1), причем здесь они равномерны по  $t \in [0, \infty)$ , и, проследивая доказательство теоремы 1 в [14], получаем, что следующая из нее оценка

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = O(r^{-\delta(\infty) - \varepsilon}), \quad (5.11)$$

$$(r \rightarrow 0), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \delta(\infty) = \max(\delta_\infty, \alpha_1)$$

является равномерной по  $t \in [0, \infty)$ , т. е. верной и для  $t = \infty$ . Здесь  $\delta_\infty$  дается формулой (5.10), воспользоваться которой, а значит и оценкой можно лишь в том случае, когда имеется информация о спектре  $\sigma(\kappa^*)$ .

Рассмотрим один из таких случаев, когда спектр удается вычислить. Пусть оператор  $\kappa$  при больших временах стремится к оператору  $\kappa^0$  с разностным ядром  $\kappa^0(t-\tau)$ , соответствующему состарившемуся материалу (см. п. 6 [15]) в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \leq t < \infty} \int_{\tau}^t |\kappa(t, \tau) - \kappa^0(t-\tau)| d\tau = 0$$

Можно показать, что это имеет место, если таким свойством обладает оператор  $\nu$  и, в частности, если аналогичные соотношения выполнены для операторов  $\lambda$  и  $\mu$ . По теореме 2 [16] спектры операторов  $\kappa^*$  и  $\kappa^{0*}$  совпадают, а из теоремы Винера — Пэли (теорема 18 [17], см. также п. 3<sup>o</sup> [16]) следует, что спектр  $\sigma(\kappa^{0*})$  состоит из чисел  $\gamma$ , равных

$$\gamma(\omega) = \int_0^\infty \kappa^0(\tau) \exp(-\omega\tau) d\tau \quad (5.12)$$

где параметр  $\omega$  пробегает полуплоскость  $\operatorname{Re} \omega \geq 0$ . Отсюда при помощи формулы (5.10) параметр  $\delta(\infty)$  в оценке (5.11) можно прямо вычислить

$$\delta(\infty) = \max \left\{ \sup_{\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Re} s_{h\infty} < 1} [\operatorname{Re} s_{h\infty}(\gamma(\omega))], \delta_{2\infty}, \alpha_1 \right\},$$

$$\Delta[s_{h\infty}, \kappa_0(\infty) + \gamma(\omega)] = 0 \quad (5.13)$$

Функция  $\gamma(\omega)$  дается выражением (5.12).

Учитывая, что спектры оператора Вольтерра, действующего в  $C[0, \infty)$ , в пространствах  $C[0, \infty)$  и  $L_\infty[0, \infty]$  совпадают [16], приходим к заключению, что результаты, полученные для функций  $f_i, g_i \in C[0, \infty)$  верны и для функций  $f_i, g_i \in L_\infty[0, \infty]$  по времени для почти всех  $r$ .

5.4. Рассмотрим далее разностные операторы без старения, то есть  $\lambda_0, \mu_0 = \text{const}$ ;  $\lambda(t, \tau) = \lambda(t - \tau)$ ,  $\mu(t, \tau) = \mu(t - \tau)$ . Пусть при  $t = -\infty$  приложены периодические воздействия  $g_i(r, t) = g_{i0}(r) \cos \Omega t$ ,  $f_i(r, t) = f_{i0}(r) \cdot \cos \Omega t$ , которые представим в виде суммы  $g_i = 1/2 g_{i0}(r) (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$ ,  $f_i = 1/2 f_{i0}(r) (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$ .

Ввиду линейности задачи решим ее сначала с нагрузкой, задаваемой первым членом в скобках, а затем сложим найденное решение с решением, полученным из него заменой  $\Omega$  на  $-\Omega$ .

Будем искать решения систем (1.10), (1.12), соответствующих задачам (I-I) и (II-I) в виде

$$\Phi_j \sim(s, t) = \Phi_{j0} \sim(s) \exp [i(\Omega t + \varepsilon)], \quad \Psi_j \sim(s, t) = \Psi_{j0} \sim(s) \exp [i(\Omega t + \varepsilon)]$$

Тогда после подстановки в (1.10) и (1.12) придем к тем же системам с заменой там операторов  $\kappa$  и  $\mu$  их постоянными комплексными аналогами  $\kappa_c(\Omega)$  и  $\mu_c(\Omega)$

$$\kappa_c(\Omega) = \kappa_0 + \int_0^\infty \kappa(\tau) e^{-i\Omega \tau} d\tau, \quad \mu_c(\Omega) = \mu_0 + \int_0^\infty \mu(\tau) e^{-i\Omega \tau} d\tau$$

Разрешая полученные системы, снова приходим к выражениям (1.13), а после обращения Меллина — к асимптотикам (2.4) — (2.7), в которых функции  $\Delta, A_{jk}, T_j$  — свои для каждой задачи с заменой в них  $\kappa$  на  $\kappa_c(\Omega)$  и  $\mu$  на  $\mu_c(\Omega)$ . Замена в полученных представлениях  $\Omega$  на  $-\Omega$  дает вторую половину решения. Отметим, что корни  $s_{kc}(\Omega)$ , зависящие от частоты нагружения, при  $\Omega \neq 0$  будут, как правило, комплексными числами, а учитывая, что  $\kappa_c(-\Omega) = \kappa_c(\Omega)$ ,  $\mu_c(-\Omega) = \mu_c(\Omega)$  можно показать, что части решения для  $\Omega$  и  $-\Omega$  дают комплексно сопряженные степени сингулярности напряжений. В результате оказывается, что асимптотика напряжений и смещений будет осциллировать при подходе к угловой точке, т. е.  $\sigma_r \sim r^{-s_{k1}(\Omega)} \cos[s_{k2}(\Omega) \ln r + c]$ , где  $s_{k1} = \text{Re } s_{kc}(\Omega)$ ,  $s_{k2} = \text{Im } s_{kc}(\Omega)$ .

В итоге получаем, что асимптотика напряжений в задачах (I-I) и (II-I) при колебательной нагрузке для наследственно упругого тела без старения будет действительной частью асимптотики, получаемой для наследственного тела, если в качестве  $\kappa$  и  $\mu$  взять там комплексные модули  $\kappa_c(\Omega)$  и  $\mu_c(\Omega)$ .

Отметим, что поскольку для задач I-I, II-I оценки (5.3), (5.5) не являются равномерными по  $t$  на полубесконечном интервале, то при  $t \rightarrow \infty$  они, вообще говоря, не соответствуют асимптотике для материала с затухающей памятью, полученной в предположении, что воздействия  $f_i, g_i$  стремятся к конечным пределам  $f_i(\infty), g_i(\infty)$ , или асимптотике для нестареющего материала под действием колебательных нагрузок, если даже упругие операторы действуют и ограничены в соответствующих пространствах. Две последние асимптотики могут не соответствовать друг другу, поскольку они верны лишь для двух различных характеров нагрузок. Но все эти асимптотики и оценки являются уточнением оценки (5.11), (5.10) (или (5.14), (5.13)), если оператор  $\kappa$  стремится к оператору с разностным ядром, которая является более грубой, но равномерной по  $t \in [0, \infty)$ .

До сих пор речь шла о задачах для бесконечного клина. При помощи срезающей функции эти результаты, так же, как и в [7-10], легко переносятся на задачи для двумерного тела произвольной формы с угловыми точками. При этом использование срезки позволяет перейти от задачи в теле произвольной формы к соответствующей модельной задаче в бесконечном клине, тип граничных условий в которой будет тем же, что и в исходной задаче в окрестности изучаемой угловой точки. Правые части граничных условий в модельной задаче хотя и не являются известными вдоль всей границы, но будут удовлетворять условию 1, если в окрестности угловой точки этому условию (в нуле) с некоторым параметром  $\alpha_1 = \alpha_1^0$  удовлетворяют

правые части граничных условий исходной задачи. Кроме того в модельной задаче в некоторой конечной области  $D^\circ$ , отграниченной от угловой точки и бесконечности, будут отличны от нуля правые части уравнений Ламе (массовые силы). Наложение на эту задачу решения задачи для бесконечной плоскости с заданными массовыми силами, которое получается интегрированием по области  $D^\circ$  решения задачи о сосредоточенной силе в бесконечной стареющей наследственноупругой плоскости, позволяет перейти к рассматривавшимся в п. 1–5 задачам для клина без массовых сил с фиктивно заданными правыми частями граничных условий, которые удовлетворяют условию 1 с параметром  $\alpha_1 = \max(\alpha_1^\circ, 0)$ . Легко показать, что решение для сосредоточенной силы получается из соответствующего решения для классической упругой среды [13] заменой фигурирующей там упругой постоянной  $\kappa$  наследственным оператором  $\kappa$ , действующим на величины компонент сосредоточенной силы — функции времени.

Таким образом, если тип граничных условий в окрестности угловой точки тела произвольной формы совпадает с типом граничных условий в задачах (I–I), (II–II) или (II–I), то асимптотика напряжений и смещений в ее окрестности будет той же (с точностью до смещения как жесткого целого), что и в соответствующей задаче о бесконечном клине с некоторыми неизвестными обобщенными коэффициентами интенсивности напряжений  $B_{kmn}(t)$ ,  $D_{kmn}(t)$ , для определения которых необходимо полностью решить исходную задачу, и  $\alpha_1 = \max(\alpha_1^\circ, 0)$ .

Автор признателен Н. Х. Арутюняну за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. — J. Appl. Mech., 1952, v. 19, № 4, p. 526–528.
2. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178–186.
3. Чобанян К. С., Алексанян Р. К. Термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела. — Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, № 3, с. 22–32.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1963, 367 с.
5. Vogt D. B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. — Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech., 1971, v. 38, № 2, p. 377–386.
6. Михайлов С. Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам. — Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 6, с. 33–42.
7. Кондрагеев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209–292.
8. Эскин Г. И. Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1970, т. 21, с. 245–292.
9. Арутюнян Н. Х., Назаров С. А., Шойхет Б. А. Оценка и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести. — Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1361–1366.
10. Журавлев В. П., Назаров С. А., Шойхет Б. А. Асимптотика вблизи вершины трещины напряженно-деформированного состояния неоднородно-стареющих тел. — ПММ, 1983, т. 47, № 2, с. 200–208.
11. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952, 323 с.
12. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 383 с.
13. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
14. Гитчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л.: Гостехиздат, 1948, 479 с.
15. Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями. — Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 3, с. 31–48.
16. Гольденгершель Э. И. Спектр вольтеррова оператора на полуоси и экспоненциальный рост решений систем интегральных уравнений типа Вольтерра. — Матем. сб., 1964, т. 64, № 1, с. 115–139.
17. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964, 268 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.VIII.1983