

СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ  
В СОСТАВНОМ ПРОИЗВОЛЬНО-АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ  
И ПРИЛОЖЕНИЯ К КОМПОЗИТАМ

С. Е. МИХАЙЛОВ

(Москва)

Рассматривается сингулярность напряжений в окрестности линии пересечения свободной поверхности составного упругого произвольно-анизотропного тела с поверхностью соединения его разнородных частей. Строится решение модельной задачи для двумерного составного клина, в результате чего находится аналитическая функция, нули которой равны степени сингулярности напряжений исходного трехмерного тела. Определена степень сингулярности для некоторых композитов, составленных из слоев с различными направлениями укладки волокон, и для композитов, соединенных с алюминием.

В работе [1], опираясь на результаты [2-4], было показано, что степень сингулярности напряжений в окрестности ребра определяется решением некоторой модельной задачи в двумерном составном клине. Когда тело около ребра имеет плоскость симметрии упругих свойств, перпендикулярную ребру, модельная задача распадается на задачу плоской деформации и задачу кручения (или антиплоской деформации). Первая из них рассмотрена в [5], вторая — в [6]. В [1] на основании [5, 6] были вычислены степени сингулярности для композитов, имеющих плоскость симметрии упругих свойств, перпендикулярную ребру. Здесь анализируется случай произвольной анизотропии.

1. Рассмотрим сначала задачу обобщенной плоской деформации составного прямолинейно-анизотропного клина с анизотропией общего вида, т. е. задачу для двугранного бесконечного клина, напряжения в котором не меняются вдоль ребра, боковые нагрузки самоуравновешены, растяжение, кручение и изгиб отсутствуют. Пусть на боковых гранях заданы усилия, а на поверхности соединения — жесткое сцепление. В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, x_3$  с началом в вершине клина и осью  $x_3$ , направленной вдоль ребра, граничные условия имеют вид

$$\sigma_{\varphi}'(r, \varphi_1) = t_1(r), \quad \tau_{r\varphi}'(r, \varphi_1) = t_2(r), \quad \tau_{3\varphi}'(r, \varphi_1) = t_3(r) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}''(r, \varphi_2) &= t_4(r), \quad \tau_{r\varphi}''(r, \varphi_2) = t_5(r), \quad \tau_{3\varphi}''(r, \varphi_2) = t_6(r) \\ \sigma_{\varphi}'(r, 0) &= \sigma_{\varphi}''(r, 0), \quad \tau_{r\varphi}'(r, 0) = \tau_{r\varphi}''(r, 0), \quad \tau_{3\varphi}'(r, 0) = \tau_{3\varphi}''(r, 0) \\ u_r'(r, 0) &= u_r''(r, 0), \quad u_{\varphi}'(r, 0) = u_{\varphi}''(r, 0), \quad u_3'(r, 0) = u_3''(r, 0) \end{aligned}$$

штрихом помечены величины в одной части клина, двумя штрихами — в другой.

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы соответственно свободных поверхностей первой и второй части клина с поверхностью соединения, где  $\varphi = 0$  ( $\varphi_2 \leq 0 \leq \varphi_1$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 \leq 2\pi$ ),  $t_i$  — заданные функции. Напряженное состояние каждой части составного клина определяется решениями уравнения [7]:

$$(L_1 L_2 - L_3^2) f = 0, \quad L_1 = b_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 2b_{26} \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned}
 & + (2b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2b_{16} \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + b_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \\
 L_3 = & -b_{24} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (b_{25} + b_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} - (b_{14} + b_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} + b_{15} \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \\
 L_2 = & b_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2b_{45} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{55} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad b_{ij} = a_{ij} - a_{i3} a_{j3} a_{33}^{-1}
 \end{aligned}$$

где  $a_{ij}$  — упругие константы материала в обобщенном законе Гука (см. [7]). Общее решение уравнения (1.2) выписывается при помощи корней характеристического уравнения

$$l_4(\mu)l_2(\mu) - l_2^2(\mu) = 0 \quad (1.3)$$

где полиномы  $l_i$  получаются из  $L_i$  заменой  $\partial^i / \partial x_i^i$  на единицу и  $\partial^i / \partial x_2^i$  на  $\mu^i$ .

Пусть  $\mu_j$  — корни уравнения (1.3):

$$\begin{aligned}
 a_j &= \cos \varphi + \mu_j \sin \varphi, \quad b_j = \mu_j \cos \varphi - \sin \varphi \\
 z_j &= x_1 + \mu_j x_2 = r a_j(\varphi), \quad D_j = d / dz_j \\
 \lambda_j &= -l_3(\mu_j) l_2(\mu_j)^{-1}, \quad l_2(\mu_j) \neq 0; \quad \lambda_j = 1, \quad l_2(\mu_j) = 0 \\
 \delta_j &= 1, \quad l_2(\mu_j) \neq 0; \quad \delta_j = 0, \quad l_2(\mu_j) = 0 \\
 p_j &= \delta_j (b_{11} \mu_j^2 + b_{12} - b_{16} \mu_j) + \lambda_j (b_{15} \mu_j - b_{14}) \\
 q_j &= \delta_j (b_{12} \mu_j + b_{22} \mu_j^{-1} - b_{26}) + \lambda_j (b_{25} - b_{24} \mu_j^{-1}) \\
 r_j &= \delta_j (b_{14} \mu_j + b_{24} \mu_j^{-1} - b_{46}) + \lambda_j (b_{45} - b_{44} \mu_j^{-1}) \\
 c_j &= p_j \cos \varphi + q_j \sin \varphi, \quad d_j = q_j \cos \varphi - p_j \sin \varphi \\
 h_1 &= b_{12} - \mu_1 \mu_2 b_{11}, \quad h_2 = h_1 - b_{11} (\mu_1 - \mu_2)^2
 \end{aligned}$$

Материал, у которого среди корней  $\mu_j$  уравнения (1.3) нет равных, будем относить к типу А. Для такого материала (см. [7]):

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \sum_{j=1}^6 \delta_j b_j^2 D_j^2 f_j, \quad \sigma_\varphi = \sum_{j=1}^6 \delta_j a_j^2 D_j^2 f_j \\
 \tau_{r\varphi} &= - \sum_{j=1}^6 \delta_j a_j b_j D_j^2 f_j, \quad \tau_{3r} = \sum_{j=1}^6 \lambda_j b_j D_j^2 f_j, \quad \tau_{3\varphi} = - \sum_{j=1}^6 \lambda_j a_j D_j^2 f_j \quad (1.4) \\
 u_r &= \sum_{j=1}^6 c_j D_j f_j, \quad u_\varphi = \sum_{j=1}^6 d_j D_j f_j, \quad u_3 = \sum_{j=1}^6 r_j D_j f_j
 \end{aligned}$$

Рассмотрим также материал, для которого  $l_3(\mu) = 0$ , а уравнение  $l_4(\mu) = 0$  имеет попарно равные корни, и отнесем его к типу В. В частности, к типу В относятся изотропные материалы и трансверсально-изотропные с осью изотропии, перпендикулярной плоскости клина. Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — два различных корня уравнения  $l_4(\mu) = 0$ , а  $\mu_5, \mu_6$  — корни уравнения  $l_2(\mu) = 0$ ;  $m = 3 - j$ . Тогда из [5, 7] для данного материала получаем

$$\sigma_r = \sum_{j=1}^2 [b_j^2 (D_j^2 f_j + z_m D_j^2 g_j) + 2b_j b_m D_j g_j]$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\varphi &= \sum_{j=1}^2 [a_j^2 (D_j^2 f_j + z_m D_j^2 g_j) + 2a_j a_m D_j g_j] \\
 \tau_{r\varphi} &= - \sum_{j=1}^2 [a_j b_j (D_j^2 f_j + z_m D_j^2 g_j) + (a_j b_m + a_m b_j) D_j g_j] \\
 u_r &= \sum_{j=1}^2 [h_1 a_j (D_j f_j + z_m D_j g_j) + h_2 a_m g_j] \\
 u_\varphi &= \sum_{j=1}^2 [h_1 b_j (D_j f_j + z_m D_j g_j) + h_2 b_m g_j] \\
 \tau_{3r} &= \sum_{j=5}^6 b_j D_j^2 f_j, \quad \tau_{3\varphi} = - \sum_{j=5}^6 a_j D_j^2 f_j, \quad u_3 = \sum_{j=5}^6 r_j D_j f_j
 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь и далее, если знак суммы отсутствует, то суммирование по повторяющимся индексам не производится. В (1.4), (1.5)  $f_j(z_j)$ ,  $g_j(z_j)$  — аналитические функции своих аргументов, являющиеся решением (1.2) и подлежащие определению из граничных условий.

Можно выписать выражения для напряжений и смещений через некоторые аналитические функции и для других соотношений между корнями  $\mu_j$  уравнений (1.3),  $l_2(\mu) = 0$  и  $l_3(\mu) = 0$ , но практического значения они, видимо, не имеют, и поэтому ограничимся приведенными двумя случаями.

Рассмотрим преобразование Мелина комплексной функции  $v(z) = v(x_1 + \mu x_2)$ , где  $\mu$  — некоторая комплексная константа, а  $x_1, x_2$  — декартовы координаты на плоскости.

Пусть  $\langle v \rangle$  — трансформанта Мелина функции  $v(z)$ , тогда

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v(x_1 + \mu x_2) r^{s-1} dr = a^{-s}(\varphi) V(s)$$

$$a(\varphi) = \cos \varphi + \mu \sin \varphi, \quad V(s) = \int_0^\infty v(z) z^{s-1} dz$$

Если  $v(z)$  аналитична в секторе  $\psi_1 < \varphi < \psi_2$ ,  $0 < r < \infty$  и  $v(z) = O(r^\xi)$  ( $r \rightarrow 0$ ),  $v(z) = O(r^\eta)$  ( $r \rightarrow \infty$ ),  $\eta < \xi$ , то  $V(s)$  существует в полосе  $-\xi < \text{Re } s < -\eta$  и не зависит от  $\varphi$ .

Обратное преобразование определим обычным образом

$$v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle v \rangle r^{-s} ds$$

Будем искать решение, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\sigma_{ij} = O(r^{-1+\alpha}), \quad r \rightarrow 0; \quad \sigma_{ij} = O(r^{-1-\beta}), \quad r \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0 \quad (1.6)$$

Будем считать, что  $u_i, \tau$  также удовлетворяет (1.6) (тем самым исключается поворот клина как жесткого целого). В этом случае к  $\sigma_{ij}, u_i, \tau$  можно применить преобразование Мелина.

Рассмотрим два возможных случая: А-А — обе части клина состоят из материалов типа А; А-В — одна часть — из материала типа А, другая — типа В. Третий возможный случай В-В сводится к плоской деформации и кручению и рассмотрен в [1, 5, 6].

Так же, как и в [3] подставим в (1.1) напряжения и смещения из (1.4), (1.5), продифференцируем последние три из получившихся равенств по  $\gamma$  и применим ко всем двенадцати выражениям преобразование Мелина по  $\gamma$ . В результате для обоих случаев А-А и А-В получим систему уравнений относительно  $U_i$ :

$$\sum_{j=1}^{12} B_{ij}U_j = T_i \quad (i=1,2,\dots,12) \quad (1.7)$$

$$T_j^* = \|\langle t_1 \rangle, \langle -t_2 \rangle, \langle -t_3 \rangle, \langle t_4 \rangle, \langle -t_5 \rangle, \langle -t_6 \rangle, 0, 0, 0, 0, 0, 0\|$$

В случае А-А

$$U_j^* = \|F_1', F_2', F_3', F_4', F_5', F_6', I_1'', I_2'', I_3'', F_4'', F_5'', F_6''\|$$

В случае А-В

$$U_j^* = \|F_1', F_2', F_3', F_4', F_5', F_6', F_1'', F_2'', G_1'', G_2'', F_5'', F_6''\|$$

$$F_j = \int_0^{\infty} D_j^2 f_j(z_j) z_j^{s-1} dz_j, \quad G_j = \int_0^{\infty} D_j g_j(z_j) z_j^{s-1} dz_j$$

где звездочка означает транспонирование.

Матрица  $B_{ij}$  для случая А-В приведена на стр. 37.

Здесь считается, что индексы в первой части клина (А) меняются от 1 до 6, во второй (В) — от 7 до 12. Также — только здесь — считалось, что  $a_j = a_j(\varphi_1)$ ,  $b_j = b_j(\varphi_1)$ , если  $j=1, 2, \dots, 6$ , и  $a_j = a_j(\varphi_2)$ ,  $b_j = b_j(\varphi_2)$ , если  $j=7, 8, \dots, 12$ ;  $\omega_{ij} = (1-s)a_j b_i + a_i b_j$ .

Для случая А-А матрица  $B_{ij}$  изменится так, что ее правая часть будет аналогична левой, естественно со своими  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $\mu_j$ ,  $\lambda_j$ ,  $\delta_j$ ,  $p_j$ ,  $q_j$ ,  $r_j$ .

Пусть  $\Delta = \det(B_{ij})$ ,  $A_{ij}$  — алгебраические дополнения  $B_{ij}$ ,  $a_j = a_j(\varphi)$ ,  $b_j = b_j(\varphi)$ . Решая систему (1.7) и подставляя полученные значения  $F_j$ ,  $G_j$  в формулы для трансформант напряжений и смещений, получим решение в трансформантах Мелина. Выпишем, к примеру, трансформанту напряжения  $\langle \sigma_r \rangle$  для случая А-В. В материале типа А:

$$\langle \sigma_r' \rangle = \sum_{i=1}^{12} T_i \sum_{j=1}^6 a_j^{-s} b_j^2 A_{ij} \Delta^{-1} \quad (1.8)$$

В материале типа В ( $m=15-j$ ):

$$\langle \sigma_r'' \rangle = \sum_{i=1}^{12} T_i \sum_{j=7}^8 a_j^{-s} b_j^2 [A_{ij} + (2b_j^{-1}b_m - sa_j^{-1}a_m)A_{ij+2}] \Delta^{-1} \quad (1.9)$$

Для случая А-А трансформанты напряжений в обеих частях клина будут выглядеть аналогично (1.8). Применяя обратное преобразование Мелина к выражениям для трансформант напряжений и смещений, пользуясь теорией вычетов и считая, что  $t_i$  при больших и при малых  $\gamma$  предствимы в виде сумм (возможно бесконечных) различных степеней  $\gamma$ , полу-

$\delta_1 a_1^{2-s} b_1$	$\delta_2 a_2^{2-s} b_2$	$\delta_3 a_3^{2-s} b_3$	$\delta_4 a_4^{2-s} b_4$	$\delta_5 a_5^{2-s} b_5$	$\delta_6 a_6^{2-s} b_6$	$\delta_7 a_7^{2-s} b_7$	$\delta_8 a_8^{2-s} b_8$	$\delta_9 a_9^{2-s} b_9$	$\delta_{10} a_{10}^{2-s} b_{10}$	$\delta_{11} a_{11}^{2-s} b_{11}$	$\delta_{12} a_{12}^{2-s} b_{12}$
$\lambda_1 a_1^{1-s}$	$\lambda_2 a_2^{1-s}$	$\lambda_3 a_3^{1-s}$	$\lambda_4 a_4^{1-s}$	$\lambda_5 a_5^{1-s}$	$\lambda_6 a_6^{1-s}$	$\lambda_7 a_7^{1-s}$	$\lambda_8 a_8^{1-s}$	$\lambda_9 a_9^{1-s}$	$\lambda_{10} a_{10}^{1-s}$	$\lambda_{11} a_{11}^{1-s}$	$\lambda_{12} a_{12}^{1-s}$
$\delta_1 \mu_1$	$\delta_2 \mu_2$	$\delta_3 \mu_3$	$\delta_4 \mu_4$	$\delta_5 \mu_5$	$\delta_6 \mu_6$	$\delta_7 \mu_7$	$\delta_8 \mu_8$	$\delta_9 \mu_9$	$\delta_{10} \mu_{10}$	$\delta_{11} \mu_{11}$	$\delta_{12} \mu_{12}$
$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$
$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$
$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$	$q_8$	$q_9$	$q_{10}$	$q_{11}$	$q_{12}$
$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$	$r_9$	$r_{10}$	$r_{11}$	$r_{12}$

чаем (подробнее см. [5]) в материале типа А:

$$\sigma_r' = \sum_{s_k < 1} \operatorname{res}_{s_k} \left\{ \sum_{i=1}^{12} T_i \sum_{j=1}^6 a_j^{-s} b_j^2 A_{ij} \Delta^{-1} r^{-s} \right\} = \sum_{s_k < 1} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} \Psi'_{rkn}(\varphi) (\ln r)^n \quad (1.10)$$

В материале типа В:

$$\sigma_r'' = \sum_{s_k < 1} \operatorname{res}_k \left\{ \sum_{i=1}^{12} T_i \sum_{j=7}^8 a_j^{-s} b_j^2 [A_{ij} + (2b_j^{-1} b_m - sa_j^{-1} a_m) A_{ij+2}] \Delta^{-1} r^{-s} \right\} = \sum_{s_k < 1} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} \Psi''_{rkn}(\varphi) (\ln r)^n \quad (1.11)$$

Для выполнения условий (1.6) необходимо, чтобы путь интегрирования в обратном преобразовании Мелина лежал в полосе

$$\max_{\operatorname{Re} s_k < 1} (\operatorname{Re} s_k) < c < \min_{\operatorname{Re} s_k \geq 1} (\operatorname{Re} s_k)$$

Отсюда следует ограничение  $s_k < 1$  в (1.10), (1.11). Здесь  $s_k$  — полюса  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ,  $N_k$  — их кратность,  $\Psi_{rkn}$  — гладкие функции угла  $\varphi$ . Если  $t_i \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , то в полосе  $0 \leq \operatorname{Re} s < 1$  нет полюсов  $T_i$ , и все  $s_k$  в этой полосе находятся среди нулей  $\Delta(s)$ . Другими словами, в этом случае сингулярные члены в (1.10), (1.11) определяются только нулями  $\Delta(s)$  в полосе  $0 \leq \operatorname{Re} s < 1$ .

2. В [1] установлено, что в окрестности линии пересечения свободной поверхности трехмерного анизотропного упругого тела с поверхностью соединения его разнородных частей, которую будем называть ребром, напряжения имеют вид

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha < \operatorname{Re} s_k < 1} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} \Psi_{ijkn}(\varphi) (\ln r)^n + \sigma_{ij}^{\vee} \quad (2.1)$$

Здесь  $r, \varphi$  — локальные полярные координаты, введенные в плоскости, перпендикулярной ребру, с началом в исследуемой точке ребра;  $s_k$  — нули некоторой аналитической функции  $\Delta(s)$ ,  $N_k$  — их кратность;  $\Psi_{ijkn}$  — гладкие функции. Если в окрестности исследуемой точки ребра на свободной поверхности заданы усилия  $t_i$  и  $t_i \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , то  $\alpha < 0$ , а  $\sigma_{ij}^{\vee}$  — ограниченная функция. В этом случае сингулярность напряжений определяется лишь видом функции  $\Delta(s)$ , которая, как отмечено в [1], совпадает с функцией, нули которой присутствуют в аналогичном представлении поля напряжений в плоской модельной задаче для составного клина. Уравнения модельной задачи получаются из исходных выбрасыванием членов с производными по  $x_3$  (координата  $x_3$  направлена по касательной к ребру в исследуемой точке) и младшими производными и «замораживанием» коэффициентов в исследуемой точке. Правые части основной системы уравнений и граничных условий модельной задачи интегрируемы и отличны от нуля в конечных областях, не содержащих начало координат. Таким образом, решенная в п. 1 задача для составного анизотропного клина будет модельной, если в исходной задаче на свободных поверхностях около исследуемой точки заданы усилия, а на поверхности соединения — жесткое сцепление (возможно, с натягом), а найденная там функция  $\Delta(s)$  будет определять сингулярные члены в разложении (2.1).

3. В [8-10] рассматривался краевой эффект в слоистых композитах. Для уложенных под разными углами слоев уравнения анизотропной упругости решались методом конечных элементов или конечных разностей. Отмечалось, что напряжения могут быть большими или даже бесконечными около ребра (применявшиеся численные методы не могли в чистом виде уловить эту бесконечность), но асимптотический вид их не исследовался. В [1] рассмотрена зависимость степени сингулярности напряжений от упругих и геометрических параметров слоев для композитов, направления укладки волокон которых параллельны или перпендикулярны ребру.

Используя полученный выше вид  $\Delta(s)$ , рассмотрим степень сингулярности напряжений, возникающих в углепластике, составленном из слоев, которые уложены под разными углами, и в углепластике, соединенном с алюминиевой пластиной.

На фиг. 1 схематически изображен образец из углепластика. Плоскость укладки совпадает с плоскостью фигуры. Штриховые линии показывают направление укладки, штрихпунктирная — биссектриса угла между направлениями укладки в соседних слоях. Начало координат помещено в исследуемую точку ребра между соседними слоями.

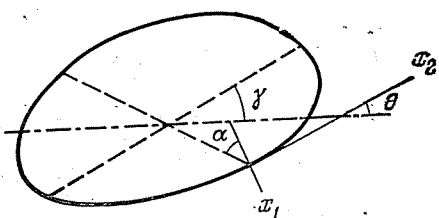
Как и в [8-10], будем рассматривать слой углепластика со следующими характеристиками: модуль Юнга в направлении армирования  $E_L = 14.6 \cdot 10^3$  кг мм<sup>-2</sup>,  $E_Z = E_T = 1.48 \cdot 10^3$  кг мм<sup>-2</sup>, модули сдвига  $G_{LT} = G_{TZ} = G_{LZ} = 0.598 \cdot 10^3$  кг мм<sup>-2</sup>, коэффициенты Пуассона  $\nu_{LT} = \nu_{LZ} = \nu_{TZ} = 0.21$ . Ось  $Z$  перпендикулярна плоскости слоя. Для получения упругих характеристик слоя  $a_{km}$  при повороте его в своей плоскости использовались зависимости [7]. Рассматриваемые слои не являются трансверсально-изотропными и, следовательно, относятся к материалу типа А при всех углах  $\alpha, \theta, \gamma$  (см. фиг. 1). Таким образом  $\Delta = \det(B_{ij})$ , где  $B_{ij}$  относится к случаю А-А. Свободная поверхность перпендикулярна поверхности соединения ( $\varphi_1 = -\varphi_2 = 90^\circ$ ).

На фиг. 2 изображена зависимость степени сингулярности напряжений  $s$  от угла  $\gamma$  при фиксированном угле  $\alpha_1$  между одним из направлений армирования и нормалью к ребру. В общем случае при изменении разориентации в соседних слоях от 0 до  $\pm 90^\circ$  имеется один абсолютный максимум степени сингулярности. В случае, когда ребро перпендикулярно или параллельно одному из направлений армирования, максимум достигается, когда армирование становится ортогональным, и график симметричен относительно этой точки. В остальных случаях симметрия исчезает и максимум сдвигается, оставаясь в окрестности ортогонального армирования. Около положения, в котором второе направление армирования становится параллельным ребру, может возникать слабо выраженный локальный минимум.

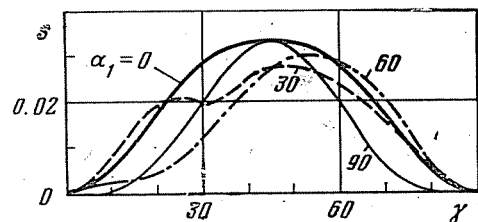
На фиг. 3 представлена зависимость  $s$  от угла наклона оси симметрии укладок к ребру  $\theta$  при трех фиксированных значениях  $\gamma \leq 45^\circ$ . Фактически — это изменение степени сингулярности при обходе по контуру образца (см. фиг. 1).

Зависимость  $s$  от угла разориентации при трех фиксированных углах  $\theta$  показана на фиг. 4. Из фиг. 1 следует, что  $s(\gamma, \theta) = s(\gamma, -\theta) = s(90^\circ - \gamma, 90^\circ - \theta)$ . При постоянном  $\theta$  степень сингулярности растет почти монотонно в интервале  $0 < \gamma < 45^\circ$ .

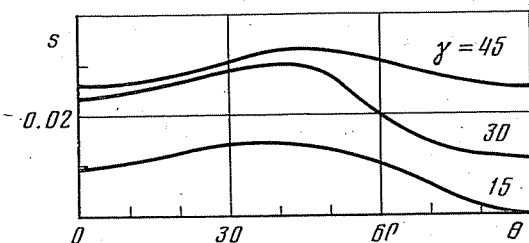
Из фиг. 2 — 4 следует, что в рассматриваемом углепластике сингулярность напряжений может иметь место при любых углах  $\alpha, \gamma, \theta$ , за исключением  $\gamma = 0$ , когда степень сингулярности обращается в нуль, так как в этом случае исчезает скачок упругих параметров на поверхности соединения. Степень сингулярности максимальна, когда ребро параллельно одному из направлений армирования и перпендикулярно другому.



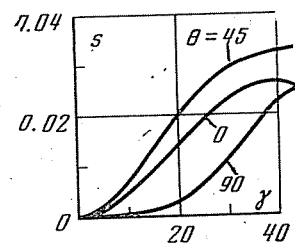
Фиг. 1



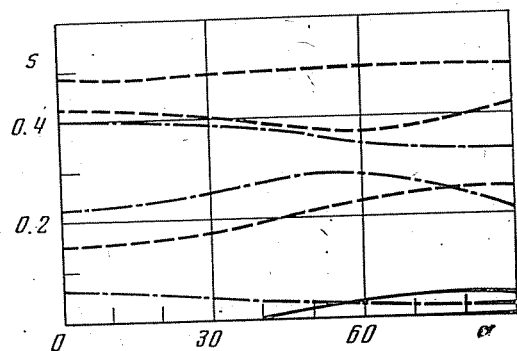
Фиг. 2



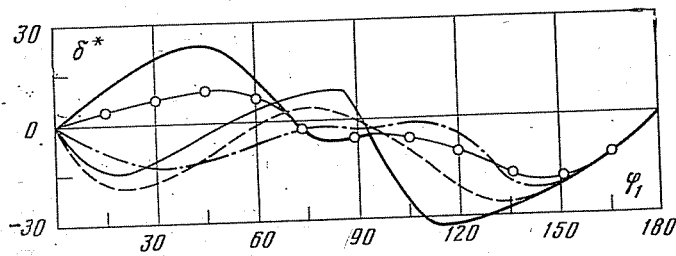
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Исследуем степень сингулярности напряжений, возникающих при соединении слоя углепластика со слоем алюминия. Расчеты проводились для слоя высокомодульного композита с характеристиками  $E_L=20 \cdot 10^3$  кг мм<sup>-2</sup>,  $E_z=E_T=2.1 \cdot 10^3$  кг мм<sup>-2</sup>,  $G_{LT}=G_{TZ}=G_{Lz}=0.85 \cdot 10^3$  кг мм<sup>-2</sup>,  $\nu_{LT}=\nu_{Lz}=\nu_{TZ}=-0.24$  (см., например, [11]) и алюминия с параметрами  $E=7.2 \cdot 10^3$  кг мм<sup>-2</sup>,  $\nu=0.3$ . Теперь имеем случай А-В и соответствующую ему матрицу  $B_{ij}$  и функцию  $\Delta(s)$ .

На фиг. 5 представлена зависимость степени сингулярности напряжений  $s$  от угла  $\alpha$  между направлением армирования слоя углепластика и нормалью к ребру при трех фиксированных значениях углов наклона поверхности углепластика ( $\varphi_1$ ) и алюминия ( $\varphi_2$ ) к поверхности соединения ( $\varphi_1=90^\circ$ ,  $\varphi_2=-90^\circ$  — сплошная линия;  $\varphi_1=180^\circ$ ,  $\varphi_2=-90^\circ$  — штриховая;  $\varphi_1=90^\circ$ ,  $\varphi_2=-180^\circ$  — штрихпунктирная). Отметим, что при достаточно больших углах  $\varphi_1$ ,  $|\varphi_2|$  появляется до трех сингулярных корней. В общем случае монотонность изменения  $s$  в зависимости от  $\alpha$  отсутствует, но если  $\varphi_1=-\varphi_2=90^\circ$ , то при повороте ребра от положения параллельно направлению армирования до положения перпендикулярно ему степень сингулярности монотонно растет.

Пусть  $\delta=180^\circ-(\varphi_1-\varphi_2)$  — локальное отклонение свободной поверхности около ребра от составной полуплоскости. Фиг. 6 представляет зависимость критической величины  $\delta^*$ , при которой максимальный корень  $\Delta(s)$  в полосе  $0 \leq \text{Re } s < 1$  становится равным нулю, от  $\varphi_1$  для пяти фиксированных значений  $\alpha$  ( $\alpha=0$  — сплошная тонкая линия,  $30^\circ$  — штриховая,  $60^\circ$  — штрихпунктирная,  $75^\circ$  — линия со светлыми точками,  $90^\circ$  — сплошная жирная линия). Для непрерывного (не составного) тела  $\delta^*=0$ . При  $\delta < \delta^*$  сингулярность будет отсутствовать при  $\delta > \delta^*$  она может появиться.

Кривые для  $\alpha=90^\circ$  и  $0$ , соответствующие положению ребра параллельно и перпендикулярно направлению армирования, взяты из работы [1]. С изменением  $\alpha$  величина  $\delta^*$  меняется довольно сложным образом. Объясняется это, видимо, тем, что модуль Юнга алюминия лежит между минимальным и максимальным модулем Юнга углепластика, а касательный модуль алюминия всегда больше касательного модуля углепластика.

Наличие графиков типа фиг. 6 позволяет для заданных материалов подбирать локальную геометрию около ребра так, чтобы сингулярность напряжений в соединении отсутствовала.

Предложенным методом легко построить матрицы  $B_{ij}$ , то есть соответствующие функции  $\Delta(s)$ , и найти степень сингулярности и для других типов граничных условий, а также для большего числа частей, в частности, рассмотреть трещину, выходящую на границу раздела составного произвольно анизотропного тела.

Автор глубоко признателен Ю. Н. Работнову за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

Поступила 26 II 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов С. Е. Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5.
2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с конечными или угловыми точками. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 16, 1967.
3. Эскин Г. И. Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными. Тр. Московск. матем. о-ва, т. 21, 1970.
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Об эллиптических краевых задачах в области с кусочно-гладкой границей. Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, Тбилиси, 1974, т. 1, Тбилиси, «Мицниереба», 1973, стр. 171.

5. Михайлов С. Е. Об одной плоской задаче для двух соединенных анизотропных клиньев. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4.
6. Алексанян Р. К., Чобанян К. С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного составного стержня. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 6, 90-96.
7. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977.
8. Pipes R. B., Pagano N. J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. J. Composite Mater., vol. 4, 1970, p. 538.
9. Pagano N. J., Pipes R. B. Some observations on the interlaminar strength of composite laminates. Internat. J. Mech. Sci., vol. 15, 1973, p. 679.
10. Wang A. S. D. Some new results on edge effect in symmetric composite laminates. J. Composite Mater., vol. 11, January, 1977.
11. Скюдра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига, «Зинатне», 1972.