

УДК 539.4:678.067

С. Е. Михайлов

О КРАЕВОМ ЭФФЕКТЕ В СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТАХ

В настоящей работе рассматривается сингулярность напряжений, которая может возникать на линии пересечения свободной поверхности композитного образца с поверхностью соединения его соседних слоев в линейно-упругом анализе. В дальнейшем эту линию будем называть ребром.

В работах, посвященных краевому эффекту в композитах [1—4] указывается, что каждый слой — однородный и анизотропный, слои соединены между собой, и образец находится в состоянии обобщенной плоской деформации, растяжения или изгиба. Уравнения анизотропной упругости решались здесь методом конечных разностей [1, 2], методом конечных элементов [3, 4], разложением в двойной ряд по полиномам Лежандра [5]. Однако эти методы в том виде, в котором они применяются, не дают верное описание краевого эффекта в напряжениях, так как напряжения в композитах могут быть сингулярными, в то время как приведенные методы хорошо работают лишь в случае, когда решение — непрерывная функция. Краевые напряжения остаются при использовании таких методов ограниченными, но их максимум растет при увеличении точности метода (например, количества учитываемых членов разложения в ряд, умноженный на член, содержащий сингулярность). Здесь будет показано, что в композитах с характеристическими значениями, близкими к реальным, сингулярность напряжений может присутствовать; будут приведены также примеры вычисления ее степени в зависимости от коэффициента армирования и укладки волокон в слоях композита. Сингулярность напряжений появляется в ряде случаев и для соединения высокомодульного композита с алюминием. Приведенные результаты дают принципиальную возможность модифицировать указанные выше методы, с тем чтобы они учитывали сингулярность напряжений явно. Например, можно использовать для расчета сингулярности конечные элементы или разлагать напряжения по ортогональным полиномам в ряд, умноженный на член, содержащий сингулярность.

Будем рассматривать многослойный композит, составленный из слоев, уложенных под разными углами, а также композит, соединенный со слоем алюминия. Каждый слой будем считать однородным и анизотропным; характеристики его считаются заданными или определяются параметрами армирования и связующего и коэффициентом армирования.

Введем декартову X_1, X_2, X_3 систему координат, помещая их начало в исследуемую точку ребра и направляя ось X_3 по касательной к ребру, а X_1 — по касательной к поверхности соединения слоев в данной точке. Рис. 1 показывает сечение окрестности ребра ($X_3=0$); D' — один слой, D'' — другой, $\varphi_2 \leq 0 \leq \varphi_1$. Между слоями предполагается жест-

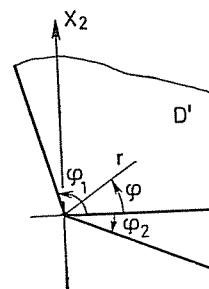


Рис. 1.

* Доклад, представленный на IV Всесоюзную конференцию по механике композитных материалов (Рига, октябрь 1980 г.).

кое соединение с натягом, в окрестности рассматриваемой точки ребра на свободных поверхностях заданы усилия. В остальном композит произвольно нагружен и подвергнут воздействию температурного поля. Пусть еще граничные усилия P_i^0 , температурное поле θ , величина скачка смещения на поверхности соединений u_i^0 и массовые силы F_i в окрестности исследуемой точки удовлетворяют следующим условиям при некотором $\varepsilon \geq 0$:

$$P_i^0 = 0(r^\varepsilon); \quad \theta = 0(r^\varepsilon); \quad u_i = 0(r^{1+\varepsilon}); \quad F_i = 0(r^{-1+\varepsilon}). \quad (1)$$

Тогда согласно результатам работы [6] напряжения около исследуемой точки ребра представляются в виде

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \sum_{0 \leq s_k < 1} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} \psi_{ijkn}(\varphi) (\ln r)^n, \quad (2)$$

где s_k — нули аналитической функции $\Delta(s) = \det B_{ij}$; B_{ij} — матрицы, возникающие при решении модельной задачи в составном клине и найденные в работах [7—9]; $\tilde{\sigma}_{ij} < \infty$; N_k — кратность нулей s_k , причем, если $\varepsilon = 0$, то N_k при $s_k = 0$ считается на единицу большей; $\psi_{ijkn}(\varphi)$ — гладкие ограниченные функции.

Из (2) видно, что если $\varepsilon > 0$ и в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s < 1$ нет нулей функции $\Delta(s)$, то напряжения в окрестности ребра будут ограниченными; если нули есть, то возможна степенная особенность напряжений около этой точки. Если при $s=0$ функция $\Delta(s)$ имеет нуль второго порядка или $\Delta(s)$ имеет простой нуль и $\varepsilon=0$, то возможна логарифмическая особенность напряжений на ребре. Таким образом, исследуя поведение нулей функции $\Delta(s)$, можно получить информацию о том, будут ли напряжения конечными или бесконечными в окрестности ребра, а во втором случае — получить еще и степень сингулярности.

Необходимо отметить, что, как показано в последних работах по исследованию общих эллиптических краевых задач в областях с нерегулярной границей, и в частности в работе [6] для составных анизотропных тел, представление (2) будет сохраняться и в том случае, когда ребро криволинейное (но достаточно гладкое). При этом функции $\Delta(s)$, а значит, и степени сингулярности s_k в (2) не зависят ни от кривизны ребра, ни от интенсивности приложенных нагрузок. Они определяются лишь типом граничных условий около исследуемой точки ребра, упругими константами материалов около этой точки и локальной геометрией, т. е. углом между касательными к поверхности соединения и к свободным поверхностям в исследуемой точке. Гладкие ограниченные функции $\psi_{ijkn}(\varphi)$ можно выразить через сумму нескольких известных функций, которые ни от чего, кроме угла φ , не зависят, с постоянными неизвестными коэффициентами. Последние можно считать обобщенными коэффициентами интенсивности напряжений, и только они будут зависеть от граничных условий и геометрии границы в остальных точках тела.

Ниже приведены графики зависимости степени сингулярности от локальной геометрии соединения, укладок волокон в соседних слоях и степени армирования. Отметим, что полученные данные дают возможность изменять локальную геометрию так, чтобы избежать сингулярности напряжений в упругом решении или просто высоких напряжений в реальном изделии. Такая возможность, видимо, вполне осуществима, по крайней мере для соединений композитов с металлами.

1. Сингулярность напряжений в слоистом композите с ребром, параллельным или перпендикулярным направлению укладки. Здесь рассмотрены только такие укладки слоев, которые вблизи ребра дают тензоры

упругости A_{ijkl} соседних слоев, обладающие плоскостью симметрии перпендикулярной ребру. Тогда согласно сказанному в работе [6] функция $\Delta(s)$, нули которой в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s < 1$ дают степень сингулярности напряжений, распадается на $\Delta_1(s)$, соответствующую плоской, и $\Delta_2(s)$, соответствующую антиплоской деформации (или кручению) и $\Delta = \Delta_1(s)\Delta_2(s)$. Функция $\Delta_1(s)$ найдена в работе [7], вид $\Delta_2(s)$ найден в работе [8], где отысканы автомодельные решения задачи кручения.

Таким образом, вопрос о расчете степени сингулярности сводится к нахождению нулей $\Delta(s)$ или, что проще, $\Delta_1(s)$ и $\Delta_2(s)$ порознь в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s < 1$, где Δ_1 и Δ_2 — определители комплексных матриц 4×4 . Корни находились численно методом Мюллера на ЭВМ БЭСМ-6. Для нахождения корней при каком-либо фиксированном наборе параметров требовалось около 30 с времени центрального процессора.

При расчетах зависимости степени сингулярности от коэффициента армирования считалось, что армирующие волокна и связующее изотропны и имеют следующие характеристики [10]: для стекловолокна $E = 42 \cdot 10^3$ кгс/мм², $\nu = 0,22$; для углеволокна $E = 42 \cdot 10^3$ кгс/мм², $\nu = 0,22$; для эпоксидного связующего $E = 0,35 \cdot 10^3$ кгс/мм², $\nu = 0,35$.

Для получения констант анизотропии слоя через константы компонентов и объемный коэффициент армирования использованы зависимости, приведенные в [11]. При расчете по этим формулам предполагается, что слой является трансверсально изотропным с осью изотропии совпадающей с направлением укладки.

Рис. 2 показывает зависимость степени сингулярности от угла φ_1 возникающих в ортогонально армированных стекло- и углепластиковых объемах содержания волокна, когда ребро параллельно одному из направлений армирования в данной точке, а свободная поверхность перпендикулярна поверхности соединения слоев ($\varphi_1 = -\varphi_2 = 90^\circ$). Кривая 1 относится к углепластику, кривая 2 — к стеклопластику. Степень сингулярности достигается в окрестности армирования $\nu = 0,5$. Как и следовало ожидать для изотропных компонентов армирования $\nu = 0$ и $\nu = 1$ степень сингулярности $s = 0$, так как становятся одинаковыми и изотропными. Если армирующие компоненты анизотропны, то такой симметрии не будет, и при $\nu = 1$ степень сингулярности нулем может не быть. Рис. 2 представляет нули $\Delta_1(s)$ и $\Delta_2(s)$ в искомом интервале для рассматриваемых композитов при антиплоской деформации или кручении таких композитов относительно параллельной ребру, сингулярности напряжений не дает.

В упоминавшихся выше работах [1—3] расчеты велись для композитов со следующими характеристиками слоя:

$$\begin{aligned} \text{модуль Юнга в направлении армирования } E_L &= 14,6 \cdot 10^3 \text{ кгс/мм}^2, \\ \text{поперечный модуль Юнга } E_Z = E_T &= 1,48 \cdot 10^3 \text{ кгс/мм}^2, \\ \text{модули сдвига } G_{LT} = G_{TZ} = G_{LZ} &= 0,598 \cdot 10^3 \text{ кгс/мм}^2, \\ \text{коэффициенты Пуассона } \nu_{LT} = \nu_{LZ} = \nu_{TZ} &= 0,2. \end{aligned}$$

Наш расчет показал, что степень сингулярности напряжений в ортогонально армированных такими слоями композитах равна $s = 0$.

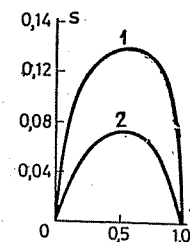


Рис. 2.

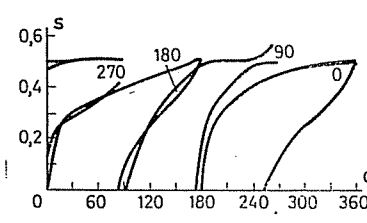


Рис. 3.

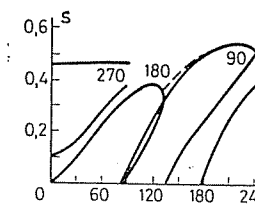


Рис. 4.

В последнее время получили распространение соединения армированных пластиков с металлами, например углепластиков с алюминием. Рассмотрим сингулярность напряжений, которая может возникнуть в таких материалах. Брали высокомодульный композит с характеристиками [9]

$$\begin{aligned} E_L &= 20 \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{мм}^{-2}; E_Z = E_T = 2,1 \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{мм}^{-2}; \\ G_{LT} &= G_{TZ} = G_{LZ} = 0,85 \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{мм}^{-2}; \nu_{LT} = \nu_{LZ} = \nu_{TZ} = 0,21. \end{aligned} \quad (4)$$

Упругие константы алюминия:

$$E = 7,2 \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{мм}^{-2}, \nu = 0,3.$$

На рис. 3 и 4 показана зависимость корня $\Delta_1(s)$ от угла наклона свободной поверхности композита к поверхности соединения при фиксированных углах наклона свободной поверхности алюминия. Рис. 3 относится к случаю, когда ребро перпендикулярно направлению армирования композита, а рис. 4 — параллельно. Цифры около кривых дают угол наклона алюминия в градусах. Штриховыми линиями обозначена $\text{Re } s$, когда два действительных корня переходят в пару комплексно сопряженных. При расчете оказалось, что в этих случаях $|\text{Im } s| < 0,1$.

Рис. 5 и 6 относятся к случаям, когда ребро перпендикулярно и параллельно направлению армирования соответственно. Кривые на них представляют два семейства: 1 — зависимость s от φ_1 (угла наклона свободной поверхности композита), когда материалы локально составляют полуплоскость ($\varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ$); 2 — плоскость с разрезом ($\varphi_1 - \varphi_2 = 360^\circ$).

Так как в рассматриваемом слое композита $G_{LT} = G_{TZ} = G_{LZ}$, то $\Delta_2(s)$ будет одинаковым для случаев, когда ребро параллельно и перпендикулярно направлению армирования. На рис. 7 показаны корни $\Delta_2(s)$ в полосе $0 \leq \text{Re } s < 1$, т. е. степень сингулярности при кручении вокруг оси, параллельной ребру, в зависимости от φ_1 для четырех фиксированных значений φ_2 , а также для составной полуплоскости и плоскости с разрезом.

Представляет интерес найти области значений φ_1, φ_2 , при которых отсутствует сингулярность напряжений, и критические соотношения этих углов, при которых максимальный корень $\Delta(s)$ в полосе $0 \leq \text{Re } s < 1$ равен нулю. Пусть $\delta = \varphi_1 - \varphi_2 - 180^\circ$ — локальное отклонение от полуплоскости сечения тела перпендикулярно ребру ($\varphi_2 < 0$ по определению, см. рис. 1). На рис. 8 представлено критическое значение δ^* в зависимости от φ_1 . Сплошной линией изображено δ^*_{12} для $\Delta_2(s)$; штриховой — δ^*_{11} для $\Delta_1(s)$, если ребро параллельно направлению армирования; штрихпунктирной — δ^*_{12} для $\Delta_1(s)$, когда ребро перпендикулярно направлению армирования.

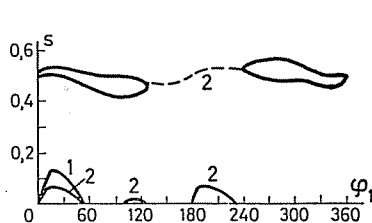


Рис. 5.

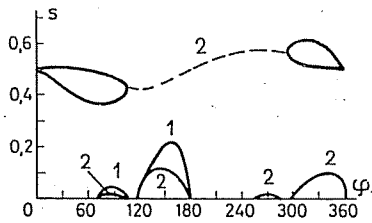


Рис. 6.

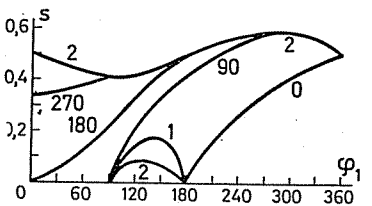


Рис. 7.

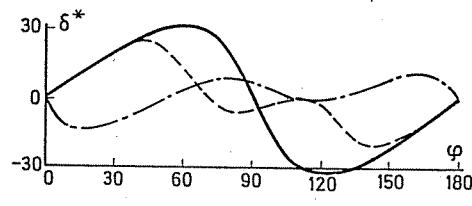


Рис. 8.

Заметим, что для однородного (не составного) тела $\delta^* = 0$. При произвольном нагружении (с заданными на свободной поверхности исследуемой точки усилиями) сингулярность напряжений будет существовать в случае, когда ребро параллельно направлению армирования, если $\delta < \min(\delta^*_{11}, \delta^*_{12})$; и в случае, когда ребро перпендикулярно направлению армирования, если $\delta < \min(\delta^*_{12}, \delta^*_{21})$. Если $\epsilon = 0$ в (1), т. е. внешние усилия ограничены около исследуемой точки ребра и могут иметь разрыв первого рода и аналогичные условия наложены на внешние воздействия, то при $\delta(\varphi_1) = \delta^*(\varphi_1)$ может возникнуть сингулярность напряжений логарифмического вида.

Анализируя графики на рис. 3—8, можно заключить, что в соединениях алюминия с композитом, даже если составное тело ограничено гладкой поверхностью ($\varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ$), может возникать сингулярность напряжений. При этом для произвольной нагрузки (при заданных усилиях) сингулярность напряжений для композита исследуемой точки (у усилия) будет отсутствовать в случаях, когда ребро перпендикулярно направлению армирования, в диапазоне $54^\circ < \varphi_1 < \varphi_2 < 70^\circ$. При достаточно больших углах $\varphi_1, |\varphi_2|$ возникает неограниченный член в представлении напряжений.

2. Сингулярность напряжений в произвольно армированном композите. В этом разделе рассматриваются композит с произвольной ориентацией волокон в соседних слоях и композит, соединенный с алюминием. На рис. 9 схематически изображен слоистый композит. Плоскость укладки волокон совпадает с плоскостью сунка. Штриховые линии показывают направление укладки, штрихпунктирная — биссектрису угла между направлениями укладки в соседних слоях.

Будем рассматривать слой углепластика с теми же характеристиками, что и в [1—3] (см. (3)). Для получения упругих характеристик при повороте его в своей плоскости использовались зависимости полученные в [12].

Как и в предыдущем разделе вопрос о степени сингулярности сводится к численному нахождению нулей функции $\Delta(s)$ в полосе $0 \leq \text{Re } s < 1$. Вид этой функции дан в работе [9]. Для нахождения корней использовался метод Мюллера при фиксированном наборе параметров эллипса, требовалось около 1,5 мин машинного времени БЭСМ-6.

На рис. 10 изображена зависимость степени сингулярности s от угла γ при фиксированном угле α_1 (значения указаны у кривых). При изменении направления армирования и нормалью к ребру между одним из направлений армирования и нормалью к ребру в общем случае при изменении разориентации укладок в соседних слоях от 0 до $\pm 90^\circ$ имеется один абсолютный максимум степени сингулярности. В случае, когда ребро перпендикулярно или параллельно одному из направлений армирования, максимум достигается, когда армирование становится ортогональным, и график симметричен относительно $\gamma = 0$. В остальных случаях симметрия исчезает и максимум не

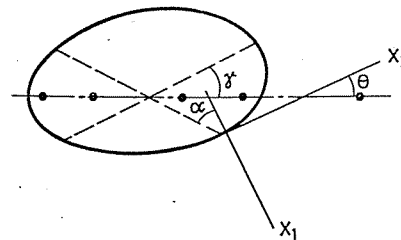


Рис. 9.

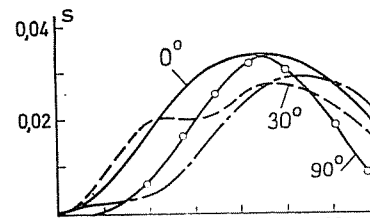


Рис. 10.

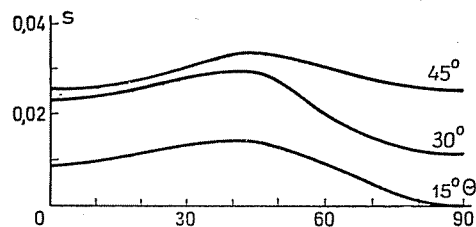


Рис. 11.

$\gamma \leq 45^\circ$. Фактически — это изменение степени сингулярности при обходе вдоль ребра по контуру образца (цифры у кривых рис. 11 — значения γ).

На рис. 12 показана зависимость степени сингулярности s от угла ориентации укладок в соседних слоях при трех фиксированных углах θ (значения θ указаны у кривых). Из рис. 9 и соображений симметрии следует, что $s(\gamma, \theta) = s(\gamma, -\theta) = s(90^\circ - \gamma, 90^\circ - \theta)$. При постоянном θ степень сингулярности s почти на всем интервале $0^\circ < \gamma < 45^\circ$ монотонно растет.

Из рис. 10—12 можно заключить, что в рассматриваемом композите сингулярность напряжений может иметь место при любых углах α, θ, γ , за исключением $\gamma = 0$, когда степень сингулярности обращается в нуль, так как в этом случае исчезает скачок упругих параметров на поверхности соединения. Степень сингулярности максимальна, когда ребро параллельно одному из направлений армирования и перпендикулярно другому.

Иследуем степень сингулярности напряжений, возникающую при соединении слоя композита со слоем алюминия. Расчеты проводили для слоя высокомодульного композита с характеристиками (4) и алюминия.

На рис. 13 представлена зависимость степени сингулярности напряжений s от угла α между направлением армирования и нормалью к ребру при трех фиксированных значениях углов наклона поверхности композита и поверхности алюминия к поверхности соединения φ_1 и φ_2 (сплошная линия — $\varphi_1 = 90^\circ$ и $\varphi_2 = -90^\circ$; штриховые — $+180^\circ$ и -90° ; штрихпунктирные — $+90^\circ$ и -180°). Отметим, что при достаточно больших углах φ_1 , $|\varphi_2|$ появляется до трех сингулярных корней. В общем случае монотонность изменения s в зависимости от α отсутствует, но если $\varphi_1 = -\varphi_2 = 90^\circ$, то при повороте ребра от положения параллельно направлению армирования до положения перпендикулярно ему, т. е. при обходе вдоль ребра по контуру образца, степень сингулярности монотонно растет.

Пусть, как и в п. 1, $\delta = \varphi_1 - \varphi_2 - 180^\circ$ — локальное отклонение свободной поверхности образца около ребра от составной полуплоскости. Рис. 14 показывает зависимость критической величины δ^* , при которой максимальный корень $\Delta(s)$ в полосе $0 \leq \text{Re } s < 1$ (а значит, и максимальная степень сингулярности напряжений) становится равным нулю, от φ_1 (цифры у кривых — значение α). Если $\delta < \delta^*$, сингулярность будет от-

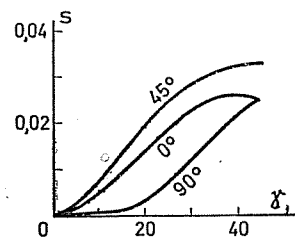


Рис. 12.

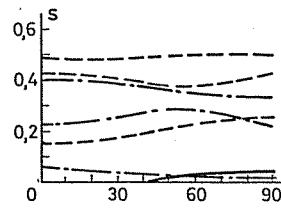


Рис. 13.

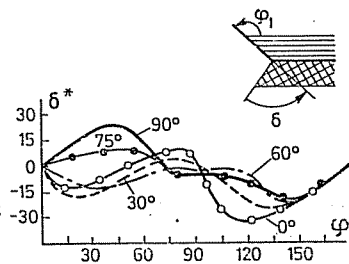


Рис. 14.

сдвигается с ортогонального армирования. Около положения, в котором второе направление армирования становится параллельным ребру, может возникать слабо выраженный локальный минимум.

Рис. 11 представляет зависимость s от угла наклона оси симметрии укладок к ребру θ при трех фиксированных значениях

сутствовать, при $\delta > \delta^*$ она, вообще говоря, появляется. Кривые $\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 0^\circ$, соответствующие положению ребра параллельно перпендикулярно направлению армирования, взяты с рис. 8. С изменением α угол δ^* меняется довольно сложным образом. Объясняется это тем, что в нашем примере модуль Юнга алюминия лежит между максимальным и минимальным значениями модуля Юнга углепластика, а касательный модуль алюминия всегда больше касательного модуля композита.

Наличие графиков типа представленных на рис. 8, 14 позволяет для заданных материалов подобрать локальную геометрию около ребра, так, чтобы сингулярность напряжений в соединении отсутствовала. Таким образом можно рассчитать степень сингулярности и для граничных условий около исследуемой особой точки.

Хотя приведенные результаты для механики разрушения композитов являются в некотором смысле качественными, а не количественными, поскольку остались неизвестными обобщенные коэффициенты интенсивности при сингулярности, тем не менее они, с одной стороны, дают какую-то достоверную информацию о поведении напряжений около ребра композита, а с другой стороны, позволяют вычислить коэффициенты интенсивности другими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pipes R. B., Pagano N. J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. — J. Composite Materials, 1970, vol. 4, p. 538—548.
2. Pagano N. J., Pipes R. B. Some observations on the interlaminar stresses in composite laminates. — Intern. J. Mech. Sci., 1973, vol. 15, N 8, p. 679—688.
3. Wang A. S. D. Some new results on edge effect in symmetric composite laminates. — J. Composite Materials, 1977, vol. 11, p. 92—106.
4. Wang A. S. D., Crossman F. W. Edge effects of thermally induced stresses in composite materials. — J. Composite Materials, 1977, vol. 11, p. 302—312.
5. Wang J. T. S., Dickson J. N. Interlaminar stresses in symmetric composite laminates. — J. Composite Materials, 1978, vol. 12, p. 390—402.
6. Михайлов С. Е. Сингулярность напряжений в окрестности ребра в соединении неоднородного анизотропного тела и некоторые приложения к композитам. — Механика твердого тела, 1979, № 5, с. 103—110.
7. Михайлов С. Е. Об одной плоской задаче для двух соединенных анизотропных тел. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1978, № 4, с. 155—159.
8. Алексанян Р. К., Чобанян К. С. Характер напряжений вблизи края контакта скручиваемого анизотропного составного стержня. — Прикл. механика, т. 13, № 6, с. 90—96.
9. Михайлов С. Е. Сингулярность напряжений в составном произвольном анизотропном теле и приложения к композитам. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1979, № 6, с. 33—42.
10. Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А. Ползучесть и статическая прочность армированных пластиков. Рига, 1971. 238 с.
11. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопrotивление жестких композитных материалов. Изд. 2-е. Рига, 1972. 498 с.
12. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е. М., 1977.

Институт машиноведения

им. акад. А. А. Благоднарова АН СССР, Москва.

Поступило в редакцию