

УДК 539.3.01

С. Е. МИХАЙЛОВ

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ВБЛИЗИ УГЛОВ ПРИ ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ УСИЛИЯХ

Рассматриваются граничные интегральные уравнения упругого потенциала простого слоя и Вейля – Хациревича, к которым сводятся плоские краевые задачи линейной теории упругости для сжимаемых и несжимаемых изотропных сред, а также линеаризованные задачи гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости, в областях с кусочно-гладкой границей при заданных на границе усилиях [1]. В рамках подхода [2] с использованием интегрального преобразования Меллина, как и в [3] для интегральных уравнений антиплоской деформации, получены явные представления асимптотик плотностей интегральных уравнений до ограниченных членов включительно. Даны асимптотики и при критических углах, когда кроме степенных появляются также и логарифмические члены, и указана связь между коэффициентами интенсивности плотностей при критических и докритических углах.

Представлена также асимптотика напряжений в окрестности угловых точек вплоть до ограниченных членов и даны выражения коэффициентов интенсивности напряжений через коэффициенты интенсивности плотностей интегральных уравнений.

1. Введение. В [1] задачи теории упругости для неодносвязных областей с угловыми точками при заданных на границе усилиях $(\sigma_{ij}n_j|_{\partial D} = g_i(s))$ сведены с помощью потенциала простого слоя первого рода к граничному интегральному уравнению типа I (ГИУ I):

$$Q_i^I(s_0) - \int_{\partial D} K_{ij}^I(s, s_0) Q_j^I(s) ds = h_i^I(s_0)$$

$$K_{ij}^I(s, s_0) = [\pi r^2(1+\kappa)]^{-1} \{ [4z_i z_j r^{-2} + (\kappa-1)\delta_{ij}] z_i n_i(s_0) + (\kappa-1)[n_j(s_0)z_i - n_i(s_0)z_j] \} \quad (1.1)$$

либо с помощью потенциала Вейля – Хациревича – к граничному интегральному уравнению типа III (ГИУ III):

$$Q_i^{III}(s_0) - \int_{\partial D} K_{ij}^{III}(s, s_0) Q_j^{III}(s) ds = h_i^{III}(s_0)$$

$$K_{ij}^{III}(s, s_0) = (2/\pi) r^{-2} z_i z_j n_i(s_0)$$

Здесь $z_i = x_i(s_0) - x_i(s)$, s – дуговая координата контура, $r^2 = z_i z_i$, $n_i(s_0)$ – внешняя нормаль к ∂D , постоянная плоской теории упругости $\kappa > 1$, $h_i^I(s) = g_i(s)$, $h_i^{III}(s) = g_i(s) + \sigma_{0ij} n_j(s)$, где σ_{0ij} – добавочное бесконечно гладкое вплоть до границы ∂D поле напряжений, появляющееся для неодносвязных областей D . По повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 2, δ_{ij} – символ Кронекера.

Ядра обоих уравнений имеют сильные стационарные особенности в угловых точках ∂D , ядро ГИУ I, кроме того, имеет особенность типа Коши, а ядро ГИУ III непрерывно в достаточно гладких точках контура. Эти

уравнения изучены в [1] в пространствах Лебега $L_p(\partial D)$ для двумерных областей D . В [4] изучалось ГИУ I в трехмерных областях с гладкими ребрами.

Через плотности Q_i^I , Q_i^{III} напряжения выражаются следующим образом [1]:

$$\sigma_{ii}(Q^I) = -\frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{\partial D} \frac{1}{r^2} \left\{ \left[4 \frac{z_i z_j}{r^2} + (\kappa-1) \delta_{ij} \right] z_i + (\kappa-1) [\delta_{ji} z_i - \delta_{ii} z_j] \right\} Q_j(s) ds \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ii}(Q^{III}) = -\frac{2}{\pi} \int_{\partial D} \frac{z_i z_j z_l}{r^4} Q_j(s) ds \quad (1.3)$$

Отметим, что представление (1.3) дает также решение уравнений Стокса несжимаемой вязкой жидкости и совпадающих с ними уравнений несжимаемой упругой среды и является гидродинамическим потенциалом простого слоя, сводящим задачи с заданными усилиями для этих сред к тому же ГИУ III [1].

2. Асимптотика решения ГИУ. Рассмотрим сначала случай, когда s^* — дуговая координата угловой точки, D — бесконечный клин $\{x_i = \rho(\delta_{ii} \cos \theta + \delta_{2i} \sin \theta), 0 < \rho < \infty, -\omega/2 < \theta < \omega/2\}, 0 < \omega < 2\pi$.

Тогда ГИУ I, III преобразуются к виду

$$Q_{ip}(\rho_0) - \int_0^\infty K_{ijpm}(\rho, \rho_0) Q_{jm}(\rho) d\rho = h_{ip}(\rho_0) \quad (2.1)$$

$$Q_{jm}(\rho) := Q_j(s^* + (-1)^m \rho), \quad h_{ip}(\rho_0) := h_i(s^* + (-1)^p \rho_0) \quad (2.2)$$

$$K_{ijpm}(\rho, \rho_0) := K_{ij}(s^* + (-1)^m \rho, s^* + (-1)^p \rho_0)$$

Пусть $L_{2,\alpha}(0, \infty)$ — весовое пространство функций с нормой

$$\|f\|_{L_{2,\alpha}} := \left\{ \int_0^\infty [f(\rho) \rho^\alpha]^2 d\rho \right\}^{1/2} < \infty, \quad L_{2,\alpha} := \bigcap_{\alpha < \beta < 1/2} L_{2,\beta}$$

т. е. множество $L_{2,\alpha}^\vee$ состоит из функций, интегрируемых с квадратом с любым весом, показатель которого $\beta \in (\alpha, 1/2)$.

Пусть $h_{ip}(\rho_0) \in L_{2,\alpha_0}^\vee$, $\alpha_0 < 1/2$. Будем искать решение Q_{ip} ГИУ (2.1), принадлежащее $L_{2,\alpha}^\vee$ с возможно большим $\alpha < 1/2$, т. е. множеству

$$M_{1/2} := \bigcup_{\alpha < 1/2} L_{2,\alpha}^\vee \equiv \bigcup_{\alpha < 1/2} \left(\bigcap_{\alpha < \beta < 1/2} L_{2,\beta} \right)$$

Этому множеству принадлежат, в частности, функции, удовлетворяющие для какого-либо $\alpha < 1/2$ оценкам

$$Q = O(r^{-1/2-\alpha+\varepsilon}) (r \rightarrow 0), \quad Q = O(r^{-1-\varepsilon}) (r \rightarrow \infty), \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$Q \in L_2(a_0, a_\infty), \quad \forall a_0, a_\infty (\infty > a_\infty > a_0 > 0)$$

которые обычно используются при нахождении асимптотик решений краевых задач (см., например [5]).

Имея в виду принадлежность $h_{ip} \in L_{2,\alpha_0}^\vee$, $Q_{ip} \in M_{1/2}$, будем, следуя [6], решать (2.1) с помощью преобразования Меллина, после применения которого к (2.1) приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\langle Q_{ip} \rangle(\gamma) - K_{ijpm}^\wedge(\gamma) \langle Q_{jm} \rangle(\gamma) = \langle h_{ip} \rangle(\gamma), \quad 1/2 + \alpha < \gamma < 1 \quad (2.3)$$

$$\langle Q_{ip} \rangle(\gamma) := \int_0^\infty Q_{ip}(\rho) \rho^{\gamma-1} d\rho, \quad K_{ijpm}^\wedge(\gamma) := \int_0^\infty K_{ijpm}(1, u) u^{\gamma-1} du \quad (2.4)$$

имеющей место в интервале $1/2 + \alpha < \operatorname{Re} \gamma < 1$ при некотором $\alpha < 1/2$. При этом функция $Q_{ip}(\rho)$ через трансформанту $\langle Q_{ip} \rangle(\gamma)$ представляется в виде

$$Q_{ip}(\rho) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle Q_{ip} \rangle(\gamma) \rho^{-\gamma} d\gamma, \quad 1/2 + \alpha < c < 1 \quad (2.5)$$

При получении (2.3), (2.4) учтено, что для бесконечного клина в силу (2.1) $K_{ijpm}(\rho, \rho_0) = \rho^{-1} K_{ijpm}(1, \rho_0/\rho)$.

Подставляя (1.1) в (2.4), получаем после ряда преобразований

$$K_{ijpm}^{I\wedge}(\gamma) = -a^I(\gamma) \chi_{ij} \Omega_{pm} - b^I(\gamma) \Omega_{ij} e_{pm} + c^I(\gamma) \delta_{ij} \Omega_{pm} - d^I(\gamma) e_{ij} e_{pm} + f^I(\gamma) e_{ij} \chi_{pm} \quad (2.6)$$

$$e_{ij} := \delta_{1i} \delta_{2j} - \delta_{2i} \delta_{1j}, \quad \chi_{ij} := -\delta_{1i} \delta_{1j} + \delta_{2i} \delta_{2j}, \quad \Omega_{ij} := \delta_{1i} \delta_{2j} + \delta_{2i} \delta_{1j} \quad (2.7)$$

$$a^I := 2(\gamma-1) \sin \varphi \cos[(\gamma-1)\varphi] [(1+\kappa) \sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$b^I := -2(\gamma-1) \sin \varphi \sin[(\gamma-1)\varphi] [(1+\kappa) \sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$c^I := -\sin[(\gamma-1)\varphi] / \sin \gamma\pi$$

$$d^I := (\kappa-1) \cos[(\gamma-1)\varphi] [(\kappa+1) \sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$f^I := -(\kappa-1)(\kappa+1)^{-1} \operatorname{ctg}(\gamma\pi), \quad \varphi := \omega - \pi$$

Матрица $K_{ijpm}^{III\wedge}(\gamma) = K_{ijpm}^{I\wedge}(\gamma)|_{\kappa=1}$.

Решение системы (2.3) имеет вид

$$\langle Q_{ip} \rangle(\gamma) = G_{ijpm}^{\wedge}(\gamma) \langle h_{jm} \rangle(\gamma) / \Delta(\gamma) \quad (2.8)$$

Здесь $G_{ijpm}^{\wedge}(\gamma)$ — алгебраические дополнения элементов матрицы размера 4×4 системы (2.3), $\Delta(\gamma)$ — ее определитель. Причем их можно выписать явно

$$\begin{aligned} G_{1111}^{\wedge} &= G_{1122}^{\wedge} = 1 - K_{2212}^{\wedge} + K_{1211}^{\wedge} + K_{1212}^{\wedge} K_{2112}^{\wedge} - K_{1211}^{\wedge} K_{2212}^{\wedge} (K_{2112}^{\wedge} + K_{1212}^{\wedge}) \\ G_{2111}^{\wedge} &= -G_{2122}^{\wedge} = K_{1211}^{\wedge} + K_{2112}^{\wedge} (K_{1112}^{\wedge} - K_{2212}^{\wedge}) + \\ &\quad + K_{1211}^{\wedge} (K_{1211}^{\wedge} - K_{2112}^{\wedge} - K_{2212}^{\wedge} K_{1112}^{\wedge}) \\ G_{1121}^{\wedge} &= G_{1112}^{\wedge} = -K_{1112}^{\wedge} + K_{1211}^{\wedge} (K_{1212}^{\wedge} + K_{2112}^{\wedge}) + \\ &\quad + K_{2212}^{\wedge} (-K_{1211}^{\wedge} + K_{1112}^{\wedge} K_{2212}^{\wedge} - K_{1212}^{\wedge} K_{2112}^{\wedge}) \\ G_{2121}^{\wedge} &= -G_{2112}^{\wedge} = K_{2112}^{\wedge} + K_{1211}^{\wedge} (-K_{2212}^{\wedge} + K_{1112}^{\wedge}) - \\ &\quad - K_{1211}^{\wedge} K_{1212}^{\wedge} - K_{1112}^{\wedge} K_{2112}^{\wedge} K_{2212}^{\wedge} + K_{1212}^{\wedge} K_{2112}^{\wedge} \\ G_{1211}^{\wedge} &= -G_{1222}^{\wedge} = -K_{1211}^{\wedge} + K_{1212}^{\wedge} (-K_{1112}^{\wedge} + K_{2212}^{\wedge}) + \\ &\quad + K_{1211}^{\wedge} (-K_{1211}^{\wedge} + K_{1112}^{\wedge} K_{2212}^{\wedge} + K_{1212}^{\wedge}) \\ G_{2211}^{\wedge} &= G_{2222}^{\wedge} = 1 + K_{1211}^{\wedge} - K_{1112}^{\wedge} + K_{1212}^{\wedge} K_{2112}^{\wedge} + \\ &\quad + K_{1112}^{\wedge} K_{1211}^{\wedge} (K_{2112}^{\wedge} + K_{1212}^{\wedge}) \\ G_{1221}^{\wedge} &= -G_{1212}^{\wedge} = K_{1212}^{\wedge} + K_{1211}^{\wedge} (-K_{2212}^{\wedge} + K_{1112}^{\wedge}) - \\ &\quad - K_{1211}^{\wedge} K_{2112}^{\wedge} - K_{1212}^{\wedge} K_{1112}^{\wedge} K_{2212}^{\wedge} + K_{1212}^{\wedge} K_{2112}^{\wedge} \\ G_{2221}^{\wedge} &= G_{2212}^{\wedge} = -K_{2212}^{\wedge} - K_{1211}^{\wedge} (K_{1212}^{\wedge} + K_{2112}^{\wedge}) + \\ &\quad + K_{1112}^{\wedge} (-K_{1211}^{\wedge} + K_{1112}^{\wedge} K_{2212}^{\wedge} - K_{2112}^{\wedge} K_{1212}^{\wedge}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для получения $G_{ijpm}^{I\wedge}$ в (2.9) берутся элементы $K_{ijpm}^{I\wedge}$, а для $G_{ijpm}^{III\wedge}$ — элементы $K_{ijpm}^{III\wedge}$:

$$\begin{aligned} \Delta^I(\kappa, \omega, \gamma) &= 16 [(\kappa+1) \sin \gamma\pi]^{-4} \Delta_*(1, \omega, \gamma) \Delta_*(-1, \omega, \gamma) \times \\ &\quad \times \Delta_*(\kappa, 2\pi - \omega, \gamma) \Delta_*(-\kappa, 2\pi - \omega, \gamma) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Delta^{III}(\omega, \gamma) = \Delta^I(1, \omega, \gamma), \quad \Delta_*(\kappa, \omega, \gamma) := \kappa \sin[(\gamma-1)\omega] + (\gamma-1) \sin \omega$$

Поскольку $h_{jm}(\rho) \in L_{2, \alpha_0}^V$, то согласно [6], $\langle h_{jm} \rangle(\gamma)$ являются регулярными аналитическими функциями в полосе $\alpha_0 + 1/2 < \operatorname{Re} \gamma < 1$, в которой, кроме того, норма $\langle h_{jm} \rangle(\gamma)$ в L_2 на прямой $\operatorname{Re} \gamma = c$ выражается через норму $h_{jm}(\rho)$ в $L_{2, c-1/2}$. Тогда в этой полосе правая часть (2.8) есть мероморфная функция с полюсами конечной кратности в нулях (по γ) функций $\Delta_*(\pm 1, \omega, \gamma)$, $\Delta_*(\pm \kappa, 2\pi - \omega, \gamma)$ для Q_{ip}^I и функций $\Delta_*(\pm 1, \omega, \gamma)$, $\Delta_*(\pm 1, 2\pi - \omega, \gamma)$ для Q_{ip}^{III} . Нули этих функций изучались ранее [7–11]; в частности, нули функции $\Delta_*(1, \omega, \gamma)$ дают степени сингулярности напряжений в упругом клине с внутренним углом ω , нагруженном симметричными краевыми усилиями, а нули функции $\Delta_*(-1, \omega, \gamma)$ — антисимметричными. Нули функции $\Delta_*(-\kappa, \omega, \gamma)$ дают степени сингулярности в клине с углом ω , нагруженном симметричными граничными перемещениями, а $\Delta_*(\kappa, \omega, \gamma)$ — антисимметричными. В полосе $0 < \operatorname{Re} \gamma < 1$ эти нули являются действительными, простыми, и в данной полосе имеется не более чем по одному нулю каждой из этих функций в интервале $0 < \omega < 2\pi$, причем корень γ_1 функций $\Delta(\kappa, \omega, \gamma)$ не меньше корня γ_2 функции $\Delta(-\kappa, \omega, \gamma)$, $\kappa \geq 1$ и $\gamma_1(\kappa, \omega), \gamma_2(\kappa, \omega) < 1/2$.

Отсюда видно, что функция $\langle Q_{ip} \rangle(\gamma)$ есть регулярная аналитическая функция в полосе $\alpha_* + 1/2 < \operatorname{Re} \gamma < 1$, где $\alpha_* = \max(0, \alpha_0)$ и следовательно, $Q_{ip}(\rho) \in L_{2, \alpha_*}^V$ [6], т. е., как и предполагалось, $Q_{ip} \in M_{1/2}$.

Теперь для нахождения решения (2.1) осталось подставить (2.8) в (2.5). Для получения асимптотики решения при $\rho \rightarrow 0$ перенесем в γ -плоскости, как и в [2, 12], контур интегрирования (2.5) влево до прямой $\operatorname{Re} \gamma = \alpha_0 + 1/2$, беря вычеты в точках полюсов $\langle Q_{ip} \rangle(\gamma)$. Допустимость этой операции, как и вложение для остаточного члена

$$Q_{ip}^*(\rho) := \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle Q_{ip} \rangle(\gamma) \rho^{-\gamma} d\gamma \in L_{2, \alpha_0}, \quad 1/2 + \alpha_0 < c < \min_{\gamma_i} 1/2 + \alpha_0 < \operatorname{Re} \gamma_i$$

где γ_i — нули функций Δ^I, Δ^{III} , следует из вида функций $G_{ijpm}(\gamma)$, $\Delta(\gamma)$ и вложения $h_{im} \in L_{2, \alpha_0}^V$. Представляет интерес один частный случай, когда $h_{im}(\rho) \in L_{2, -1/2}^V$ и, кроме того, при малых ρ :

$$h_{im}(\rho) = h_{im}(0) + h_{im}^*(\rho), \quad h_{im}^*(\rho) \in M_{-1/2}(0, a_0) := \bigcup_{\alpha < -1/2} L_{2, \alpha}(0, a_0), \quad \forall a_0 > 0$$

В этом случае предыдущие рассуждения можно продолжить, перемещая контур интегрирования в (2.5) левее точки $\gamma = 0$ и беря в ней вычет подынтегрального выражения.

Определяя вычеты явно и учитывая, что элементы $G_{ijpm}^V(\gamma)$ в точках γ_i нулей $\Delta(\gamma)$ линейно зависимы, будем иметь для решения $Q_i(s)$ в левой $Q_i^{I-}(s) = Q_{ii}(|s - s^*|)$ и правой $Q_i^{I+}(s) = Q_{i2}(|s - s^*|)$ окрестностях угловой точки s^* представления

$$Q_i^{I\mp}(s) = \sum_{k=1}^4 A_k^I(\omega, \kappa) d_{ki}^{I\mp}(\omega, \kappa) |s - s^*|^{-\nu_k^I} - \\ - \pi(\kappa + 1)[2 \sin \omega (\sin \omega - \omega \cos \omega)]^{-1} B_4(\omega) d_{0j}^{I\mp}(\omega, \kappa) + O_i^{I\mp}(s) \quad (2.11)$$

$$Q_i^{I*\mp}(s) \in M_{-1/2}(0, a_0), \quad \forall a_0 > 0$$

$$d_{0i}^{I\mp} := e_{ij} t_{jp}^{\mp}(\omega, 0, \kappa) n_p^{\mp}, \quad d_{1i}^{I\mp} := t_{ip}^{\mp}(\omega, \gamma_1^I(\omega), \kappa) n_p^{\mp}$$

$$d_{2i}^{I\mp} := e_{ij} t_{jp}^{\mp}(\omega, \gamma_2^I(\omega), \kappa) n_p^{\mp}, \quad d_{3i}^{I\mp} := \oint_{Q_{ip}^{\pm}} (2\pi - \omega, \gamma_3^I(\omega)) n_p^{\mp}$$

$$d_{4i}^{I\mp} := \pm e_{ij} q_{jp}^{\pm}(2\pi - \omega, \gamma_4^I(\omega)) n_p^{\mp}$$

$$t_{ip}^{\mp}(\omega, \gamma, \kappa) := \{ \delta_{ij} \sin[(1 - \gamma)(\omega - \pi)] \mp e_{ij}(\kappa - 1)(\kappa + 1)^{-1} \times \\ \times \cos[(1 - \gamma)(\omega - \pi)] \} q_{jp}^{\mp}(\omega, \gamma)$$

$$q_{ip}^{\mp}(\omega, \gamma) := -\delta_{ip} \sin(\gamma\omega/2) \pm e_{ip} \cos(\gamma\omega/2)$$

где $\gamma_i^I(\omega)$ ($i=1 \div 4$) — максимальные при $\operatorname{Re} \gamma_i^I < 1$ корни соответственно

$$\Delta_*(1, \omega, \gamma_1^I) = 0, \quad \Delta_*(-1, \omega, \gamma_2^I)/\gamma_2^I = 0 \quad (2.12)$$

$$\Delta_*(\kappa, 2\pi - \omega, \gamma_3^I) = 0, \quad \Delta_*(-\kappa, 2\pi - \omega, \gamma_4^I) = 0$$

Отсюда видно, что $\gamma_1^I(\omega) < 0$ при $\omega < \pi$; $\gamma_2^I(\omega) < 0$ при $\omega < \omega_0 = \text{tg } \omega_0 \approx 4,493$; $\gamma_3^I(\omega), \gamma_4^I(\omega) < 0$ при $\omega > \pi$. В этих интервалах угла ω для соответствующих γ_i^I сомножители $|s - s^*|^{-\gamma_i^I} \in M_{-\gamma_i^I}(0, a_0)$ и содержащие их слагаемые можно объединить с остаточным членом $Q_i^{i* \pm}(s)$, т. е. опустить их в явной записи (2.11). Кроме того, при $0 < \omega < 2\pi$ параметры $\gamma_i < 1/2$ ($i=1-4$).

Коэффициенты интенсивности плотности $A_i^I(\omega, \kappa)$ являются аналитическими функциями ω , имеющими в интересующих нас интервалах $0 \leq \omega \leq \gamma_i(\omega) < 1$ простые полюсы при $\gamma_i^I(\omega) = 0$ (для конечных значений $h_m(s^*)$), что для A_1^I, A_3^I, A_4^I происходит при $\omega = \pi$, а для A_2^I — при $\omega = \omega_0$. Выделяя эти особенности, коэффициенты можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_1^I(\omega, \kappa) &= A_1^{I0}(\omega, \kappa) + (\kappa + 1)^2 [2(3\kappa - 1) \sin \omega]^{-1} B_1(\omega) \\ A_2^I(\omega, \kappa) &= A_2^{I0}(\omega, \kappa) - \pi(\kappa + 1) \{2(\sin \omega - \omega \cos \omega) \times \\ &\quad \times \sin[(1 - \gamma_2(\omega))(\omega - \pi)]\}^{-1} B_4(\omega) \\ A_3^I(\omega, \kappa) &= A_3^{I0}(\omega, \kappa) - (\kappa - 1)(2 \sin \omega)^{-1} B_4(\omega) \\ A_4^I(\omega, \kappa) &= A_4^{I0}(\omega, \kappa) - (\kappa^2 - 1)[2(3\kappa - 1) \sin \omega]^{-1} B_1(\omega) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Функции $A_i^{I0}(\omega, \kappa)$ непрерывны по ω при $0 \leq \gamma_i < 1/2$, если при этом заданные граничные усилия $g_i(s)$, от которых они зависят, меняются непрерывно по ω почти во всех точках $s \in \partial D$:

$$\begin{aligned} B_k(\omega) &:= [g_i^-(s^*) y_i^{(k)-}(\omega) + g_i^+(s^*) y_i^{(k)+}(\omega)]/2 \\ y_i^{(1)\mp}(\omega) &:= -(\delta_{ij} \sin \omega \mp e_{ij} \cos \omega) n_j^\mp(\omega), \quad y_i^{(2)\mp}(\omega) := \pm y_i^{(1)\mp}(\omega) \\ y_i^{(3)\mp}(\omega) &:= \mp e_{ij} y_j^{(1)\mp}(\omega), \quad y_i^{(4)\mp}(\omega) := \pm y_i^{(3)\mp}(\omega) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отметим, что так как $B_k(\omega; \sigma_{0ij} n_j^\mp) = 0$, $B_1(\pi; \sigma_{0ij} n_j^\mp) = 0$, то $B_k(\omega; h_i^\mp) = B_k(\omega; g_i^\mp)$, $B_1(\pi; h_i^\mp) = B_1(\pi; g_i^\mp)$, т. е. параметры $B_k(\omega)$ и $B_1(\pi)$ порождаются лишь несамосогласованными в угловой точке частями заданных граничных усилий (которые не могут быть вызваны никаким непрерывным полем напряжений), и, следовательно, $B_k(\omega)$ и $B_1(\pi)$ не меняются при наложении самосогласованных усилий.

Выпишем еще асимптотику при критических значениях углов $\omega = \omega_0$, π , когда некоторые из коэффициентов в (2.11) становятся неограниченными.

При $\omega = \omega_0 \approx 257,5^\circ$, имеем $\gamma_2^I(\omega_0) = 0$; $\gamma_1^I(\omega_0) > 0$; $\gamma_3^I(\omega_0), \gamma_4^I(\omega_0) < 0$.

$$\begin{aligned} Q_i^{I\mp}(s) &= A_i^I(\omega_0, \kappa) d_{iI}^{I\mp}(\omega_0, \kappa) |s - s^*|^{-\gamma_i^I + \pi(\kappa + 1)} \times \\ &\quad \times (\omega_0 \sin \omega_0)^{-2} B_4(\omega_0) \{-d_{0i}^{I\mp}(\omega_0, \kappa) \ln |s - s^*| \mp \\ &\quad \mp (\omega_0/2) e_{ij} d_{0j}^{I\mp}(\omega_0, \kappa) \mp (\omega_0 - \pi)(\kappa - 1)[(\kappa + 1) \sin \omega_0]^{-1} q_{ip}^\mp(\omega_0, 0) n_p^\mp\} + \\ &\quad + A_2^{I0}(\omega_0, \kappa) d_{0j}^{I\mp}(\omega_0, \kappa) + Q_i^{I* \mp}(s) \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $\omega = \pi$ имеем

$$\begin{aligned} \gamma_1(\pi) &= \gamma_3(\pi) = \gamma_4(\pi) = 0, \quad \gamma_2(\pi) < 0 \\ Q_i^{I\mp}(s) &= (\kappa^2 - 1)(4\pi\kappa)^{-1} e_{ij} [g_j^-(s^*) - g_j^+(s^*)] \ln |s - s^*| \pm \\ &\quad \pm (\kappa + 1)^2 (8\kappa)^{-1} [g_i^-(s^*) - g_i^+(s^*)] + [(\kappa - 1)(\kappa + 1)^{-1} A_1^{I0}(\kappa, \pi) + \\ &\quad + A_4^{I0}(\kappa, \pi)] n_i - A_3^{I0}(\pi, \kappa) e_{ij} n_j + Q_i^{I* \mp}(s) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Соотношения (2.15), (2.16), как и (2.11), получены из (2.8) — (2.10) путем вычисления вычетов $\langle Q_{ip} \rangle(\gamma) \rho^{-1}$ по γ при соответствующих углах ω , но они могут быть получены и из (2.11) — (2.13) с помощью предельных

переходов при $\gamma_i \rightarrow 0$ с учетом следующих из (2.12) соотношений

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\gamma_2^I}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} &= \frac{2}{\omega_0}, & \left. \frac{d\gamma_1^I}{d\omega} \right|_{\omega=\pi} &= \frac{2}{\pi} \\ \left. \frac{d\gamma_3^I}{d\omega} \right|_{\omega=\pi} &= -\frac{\kappa+1}{\pi\kappa}, & \left. \frac{d\gamma_4^I}{d\omega} \right|_{\omega=\pi} &= -\frac{\kappa-1}{\pi\kappa}, & \left. \frac{d^2\gamma_1}{d\omega^2} \right|_{\omega=\pi} &= -\frac{8}{\pi^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Переходя к исследованию асимптотики решения ГИУ III, отметим, что она не может быть получена из (2.11)–(2.16) прямой подстановкой $\kappa=1$, так как функция $\gamma_3^I(\omega, \kappa)$ не является непрерывной одновременно по обоим своим аргументам.

Делая в (2.6), (2.7), (2.10) подстановку $\kappa=1$ и лишь после этого вычисляя вычеты $\langle Q_{ip}^{III} \rangle(\gamma) \rho^{-1}$, получим асимптотику

$$Q_i^{III\mp}(s) = \sum_{k=1}^4 A_k^{III}(\omega) d_{ki}^{III\mp}(\omega) |s - s^*|^{-\nu_k^{III}} \mp \pi (\sin \omega - \omega \cos \omega)^{-1} \times \\ \times B_4(\omega) n_i^{\mp}(\omega) + \pi [\sin \omega + (2\pi - \omega) \cos \omega]^{-1} A_0(\omega) n_i^{\mp}(\omega) + Q_i^{III*\mp}(s) \quad (2.18)$$

$$d_{1i}^{III\mp} := q_{ip}^{\mp}(\omega, \gamma_1^{III}(\omega)) n_p^{\mp}, \quad d_{2i}^{III\mp} := e_{ij} q_{jp}^{\mp}(\omega, \gamma_2^{III}(\omega)) n_p^{\mp}$$

$$d_{3i}^{III\mp} := \pm q_{ip}^{\pm}(2\pi - \omega, \gamma_3^{III}(\omega)) n_p^{\mp}, \quad d_{4i}^{III\mp} := \pm e_{ij} q_{jp}^{\pm}(2\pi - \omega, \gamma_4^{III}(\omega)) n_p^{\mp}$$

Здесь $Q_i^{III*\mp}(s) \in M_{-\nu_i}(0, a_0)$, $\forall a_0 > 0$; $\gamma_i^{III}(\omega)$ ($i=1 \div 4$) — максимальные при $\text{Re } \gamma_i^{III} < 1$ корни соответственно уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_*(1, \omega, \gamma_1^{III}) &= 0, & \Delta_*(-1, \omega, \gamma_2^{III})/\gamma_2^{III} &= 0 \\ \Delta_*(1, 2\pi - \omega, \gamma_3^{III}) &= 0, & \Delta_*(-1, 2\pi - \omega, \gamma_4^{III})/\gamma_4^{III} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Отсюда имеем, что $\gamma_1^{III}(\omega) < 0$ при $\omega < \pi$; $\gamma_2^{III}(\omega) < 0$ при $\omega < \omega_0 = \text{tg } \omega \approx 4,493$; $\gamma_3^{III}(\omega) < 0$ при $\omega > \pi$; $\gamma_4^{III}(\omega) < 0$ при $\omega > \omega_0 = 2\pi + \text{tg } \omega_0 \approx 1,790$. В этих интервалах угла ω для соответствующих γ_i^{III} множители $|s - s^*|^{-\nu_i^{III}} \in M_{-\nu_i}(0, a_0)$ и содержащие их слагаемые можно объединить с остаточным членом $Q_i^{III*\pm}(s)$, т. е. опустить их в явной записи (2.18). Кроме того, при $0 < \omega < 2\pi$ параметры $\gamma_i^{III} < 1/2$ ($i=1 \div 4$).

Как и для Q_i^I , коэффициенты интенсивности плотности $A_i^{III}(\omega)$ являются аналитическими функциями ω . В интервале $0 \leq \gamma_i(\omega) < 1$ соответствующие коэффициенты $A_1^{III}(\omega)$ и $A_3^{III}(\omega)$ непрерывны, а коэффициенты $A_2^{III}(\omega)$ и $A_4^{III}(\omega)$ имеют простые полюсы при $\omega = \omega_0$ ($\gamma_2^{III}(\omega) = 0$) и $\omega = \omega_0$ ($\gamma_4^{III}(\omega) = 0$) соответственно. Выделяя эти особенности, коэффициенты A_2^{III}, A_4^{III} можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_2^{III}(\omega) &= A_2^{III 0}(\omega) - \pi (\sin \omega - \omega \cos \omega)^{-1} B_4(\omega) \\ A_4^{III}(\omega) &= A_4^{III 0}(\omega) - \pi [\sin \omega + (2\pi - \omega) \cos \omega]^{-1} A_0(\omega) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Функции $A_2^{III 0}(\omega)$, $A_4^{III 0}(\omega)$ уже непрерывны для $0 \leq \gamma_i^{III} < 1/2$. Отметим еще, что $\gamma_1^{III}(\pi) = 0$ и $A_1^{III}(\pi) = -B_4(\pi) = 1/2(g_i^- - g_i^+) e_{ip} n_p$. Кроме того, несмотря на сделанные выше оговорки, прослеживается аналогия между членами асимптотики Q^I и Q^{III} , если положить $A_i^{III}(\omega) =$

$=A_i^I(1, \omega) \sin[(1-\gamma_i^{III})(\omega-\pi)]$ ($i=1, 2$); $A_i^{III}(\omega)=A_i^I(1, \omega)$ ($i=3, 4$). Однако при этом параметр $A_3^I(1, \omega)=A_3^{I0}(1, \omega)$ уже не будет непрерывным в точке $\omega=\omega_0$.

Как и выше для Q_i^I , выпишем еще асимптотику для Q_i^{III} при критических значениях углов. При $\omega=\omega_0 \approx 257,5^\circ$ будет

$$\begin{aligned} \gamma_2^{III}(\omega_0)=0; \quad \gamma_1^{III}(\omega_0)>0; \quad \gamma_3^{III}(\omega_0) \quad \gamma_4^{III}(\omega_0)<0 \\ Q_i^{III\mp}(s) = A_1^{III}(\omega_0) d_{1i}^{III\mp}(\omega_0) |s-s^*|^{-\gamma_1^{III}} \mp \\ \mp [2\pi(\omega_0^2 \sin \omega_0)^{-1} B_4(\omega_0) \ln |s-s^*| + A_2^{III0}(\omega_0)] n_i \mp + \\ + \pi(\omega_0 \sin \omega_0)^{-1} B_4(\omega_0) e_{ij} n_j \mp + (2 \cos \omega_0)^{-1} A_0(\omega_0) n_i \mp + Q_i^{III*\mp}(s) \end{aligned} \quad (2.21)$$

При $\omega=\pi$ будем иметь

$$\gamma_1^{III}(\pi)=\gamma_3^{III}(\pi)=0, \quad \gamma_2^{III}(\pi), \quad \gamma_4^{III}(\pi)<0$$

$$Q_i^{III\mp}(s) = \pm (g_i^- - g_i^+)/2 - A_0(\pi) n_i - A_3(\pi) e_{ip} n_p + Q_i^{III*\mp}(s)$$

При $\omega=\omega_0 \approx 102,5^\circ$ будем иметь $\gamma_4^{III}(\omega_0)=0$;

$$\gamma_3^{III}(\omega_0)>0; \quad \gamma_1^{III}(\omega_0) \quad \gamma_2^{III}(\omega_0)<0 \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} Q_i^{III}(s) = A_3^{III}(\omega_0) d_{3i}^{III\mp}(\omega_0) |s-s^*|^{-\gamma_3^{III}} + \\ + [2\pi(2\pi - \omega_0)^{-2}(\sin \omega_0)^{-1} A_0(\omega_0) \ln |s-s^*| + \\ + A_4^{III0}(\omega_0)] n_i \mp \pm (2 \cos \omega_0)^{-1} B_4(\omega_0) n_i \mp \pm \pi [(2\pi - \\ - \omega_0) \sin \omega_0]^{-1} A_0(\omega_0) e_{ij} n_j \mp + Q_i^{III*\mp}(s) \end{aligned}$$

Соотношения (2.21)–(2.22), как и соответствующие соотношения для Q_i^I , могут быть получены как с помощью прямого вычисления вычетов $\langle Q_{ip}^{III} \rangle(\gamma) \rho^{-\gamma}$ для критических углов ω , так и путем предельного перехода в (2.18) с учетом следующих из (2.19) соотношений

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_2^{III}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{2}{\omega_0}, \quad \frac{d\gamma_1^{III}}{d\omega} \Big|_{\omega=\pi} = -\frac{d\gamma_3^{III}}{d\omega} \Big|_{\omega=\pi} = \frac{2}{\pi} \\ \frac{d\gamma_4^{III}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = -\frac{2}{2\pi-\omega_0} \end{aligned} \quad (2.23)$$

В представлениях (2.11)–(2.22) коэффициенты A_i, B_k являются функциями от заданных правых частей h_{ip} на сторонах клина.

При анализе асимптотики решения ГИУ, на произвольном контуре ∂D , составленном из отрезков кривых Ляпунова, можно записать уравнение в окрестности рассматриваемой угловой точки s^* в виде (2.1) с некоторым конечным верхним пределом a_0 , где ядро K_{ijpm} формируется по касательным к ∂D в угловой точке. Далее получившееся ГИУ на отрезке $[0, a_0]$ необходимо продолжить с помощью тех же формул для ядра на полуось $[0, \infty)$, положив $Q_{jm}(\rho)=0, \rho>a_0$. Образовавшиеся при этом добавочно интегральные члены необходимо перенести в правую часть. Эта правая часть $h_{im}^0(\rho)$ тогда станет уже условно заданной, но по-прежнему будет принадлежать $L^2_{-1/2}(0, \infty)$, а при малых ρ $h_{im}^0(\rho)=h_{im}^0(0)+h_{im}^{0*}(\rho)$, $h_{im}^{0*} \in M_{-1/2}(0, a_0)$, если этим классам на отрезке $[0, a_0]$ принадлежала исходная правая часть h_{im} .

Таким образом удастся прийти к уже исследованной системе (2.1) на полуоси с условно заданной правой частью h_{im}^0 . Кроме того, так как около угловой точки s^* исходные g_i и условно заданные правые части различаются лишь на самосогласованные усилия, параметры $B_4(\omega)$ и $B_1(\omega)$ могут определяться по тем же формулам (2.14) через исходные усилия g_i . Этого нельзя сказать о коэффициентах A_i , которые для тела с произвольной границей через правые части априори (без полного решения уравнения на этой границе) не выражаются.

Далее, если в окрестности угловой точки s^* правая часть $g_i^\mp(s)$ – гильбертова функция, то можно показать, что остаточный член $Q_i^{*\mp}(s)$ в асимптотиках (2.11)–(2.22) – тоже принадлежит пространству Гильберта и $Q_i^{*\mp}(s^*)=0$.

Отметим, что представления асимптотик (2.11)–(2.22) инвариантны относительно положения декартовой системы координат.

В [13] представлена асимптотика плотности $Q_i^I(s)$ ГИУ I, содержащая лишь старшие члены, которые соответствуют слагаемым с коэффициентами A_1^I и A_3^I в (2.11). Эта асимптотика была получена путем сведения интегральных уравнений к вспомогательным краевым задачам и использования асимптотик для решений последних, которые были известны ранее. Степени сингулярности, данные в [13], совпадают с γ_1^I и γ_3^I , тогда как представленный там вид собственных векторов – иной.

В [14] методика, близкая к применяемой в данной работе, была использована для анализа асимптотики плотности прямых граничных интегральных уравнений плоских задач для уравнения Лапласа.

3. Асимптотика напряжений. Из представлений (1.2), (1.3) можно получить представления для трансформант напряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle(\gamma, \theta)$ в клиновидной области через трансформанты плотностей $\langle Q_{ip} \rangle(\gamma)$. Отсюда с использованием (2.8) и прямого вычисления вычетов при передвижении, как и выше, контура интегрирования в γ -плоскости в обратном преобразовании Меллина, получим асимптотику напряжений около угловой точки s^* . В местной полярной системе координат (ρ, θ) с началом в угловой точке s^* и углом θ , отсчитываемым против часовой стрелки от биссектрисы угла ω , при $\pi < \omega < 2\pi$, $\omega \neq \omega_0$ напряжения имеют вид

$$\sigma_{ij}(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^2 K_m \sigma_{ij}^{(m)}(\theta) \rho^{-m} + \sigma_{ij}^0(\theta) + \sigma_{ij}^*(\rho, \theta) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} := (2 - \gamma_1) \cos(\gamma_1 \omega / 2) \{ \cos[(2 - \gamma_1) \omega / 2] \}^{-1} \cos[(2 - \gamma_1) \theta] + \\ + (\gamma_1 + 2) \cos(\gamma_1 \theta) \quad (3.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} := -(2 - \gamma_1) \cos(\gamma_1 \omega / 2) \{ \cos[(2 - \gamma_1) \omega / 2] \}^{-1} \cos[(2 - \gamma_1) \theta] + \\ + (2 - \gamma_1) \cos(\gamma_1 \theta)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(1)} := -(2 - \gamma_1) \cos(\gamma_1 \omega / 2) \{ \cos[(2 - \gamma_1) \omega / 2] \}^{-1} \sin[(2 - \gamma_1) \theta] + \gamma_1 \sin(\gamma_1 \theta)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} := -\gamma_2 \cos(\gamma_2 \omega / 2) \{ \cos[(2 - \gamma_2) \omega / 2] \}^{-1} \sin[(2 - \gamma_2) \theta] - (\gamma_2 + 2) \sin(\gamma_2 \theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)} := -\gamma_2 \cos(\gamma_2 \omega / 2) \{ \cos[(2 - \gamma_2) \omega / 2] \}^{-1} \sin[(2 - \gamma_2) \theta] - (2 - \gamma_2) \sin(\gamma_2 \theta)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(2)} := -\gamma_2 \cos(\gamma_2 \omega / 2) \{ \cos[(2 - \gamma_2) \omega / 2] \}^{-1} \cos[(2 - \gamma_2) \theta] + \gamma_2 \cos(\gamma_2 \theta)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^0(\theta) = -B_1(\cos \omega \cos 2\theta + 1) / \sin \omega + B_2 \sin 2\theta - B_3 \cos 2\theta - \\ - B_4 [2\theta + (\cos \omega + \omega \sin \omega) \sin 2\theta] / (\sin \omega - \omega \cos \omega)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^0(\theta) := B_1(\cos \omega \cos 2\theta - 1) / \sin \omega - B_2 \sin 2\theta + B_3 \cos 2\theta - \\ - B_4 [2\theta - (\cos \omega + \omega \sin \omega) \sin 2\theta] / (\sin \omega - \omega \cos \omega)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^0(\theta) := [B_1 \operatorname{ctg} \omega + B_3] \sin(2\theta) + B_2 \cos 2\theta + B_4 [1 - (\cos \omega + \omega \sin \omega) \cos 2\theta] / \\ / (\sin \omega - \omega \cos \omega) \quad (\gamma_k = \gamma_k^I(\omega) = \gamma_k^{III}(\omega), k=1, 2)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений K_i выражаются через коэффициенты интенсивности A_i^I или A_i^{III} плотности ГИУ I или III соответственно

$$K_i = A_i^{I2} (\kappa + 1)^{-1} \{ \operatorname{ctg}(\gamma_i \pi) \sin[(1 - \gamma_i)(\omega - \pi)] + \\ + (\kappa - 1)(\kappa + 1)^{-1} \cos[(1 - \gamma_i)(\omega - \pi)] \} \quad (3.3)$$

$$K_i = A_i^{III} \operatorname{ctg}(\gamma_i \pi) \quad (3.4)$$

Коэффициенты $B_k(\omega)$ в не зависящих от радиуса членах $\sigma_{ij}^0(\theta)$ даются соотношениями (2.14), т. е. явно выражаются через предельные значения приложенных усилий $g_i^{\mp}(s^*)$. При получении этих выражений

для σ_{ij}^0 кроме прямого и обратного преобразования Меллина использовалась также подстановка (3.1) в граничные условия $\sigma_{ij}n_j|_{\partial D}=g_i$.

Возвращаясь к крайевым задачам в областях с произвольной границей, составленной из отрезков кривых Ляпунова, несложно заметить, что рассуждения, аналогичные тем, что даны в конце п. 2, приведут к представлению напряжений в виде

$$\sigma_{ii}=\sigma_{ii}^{(a)}+\sigma_{ii}^{(b)} \quad \text{Здесь член } \sigma_{ii}^{(a)} \text{ дается формулами (1.2)–(1.3), в которых } \partial D$$

заменена на границу клина, образованную касательными к исходной границе в угловой точке s^* , а плотность Q_i совпадает с исходной в некоторой зоне около точки s^* и равна нулю вне этой зоны. Асимптотика этого члена дается формулами (3.1), (3.2), в которых постоянные B_i ($i=1, 2, 3$) в σ_{ij}^0 заменяются на неопределенные постоянные. Остаточный член $\sigma_{ij}^{(b)}$, порожденный значениями Q_i на отдаленной от s^* части исходной границы ∂D , а также кривизной ∂D вблизи s^* , является непрерывной функцией вплоть до s^* и, таким образом, скажется только на неопределенности постоянных B_i ($i=1, 2, 3$). Подставляя σ_{ii} в исходные граничные условия $\sigma_{ijnj}|_{\partial D}=g_i$, получаем для B_i их прежние значения, даваемые (2.14).

Остаточный член $\sigma_{ii}^*(\rho, \theta) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, если $g_i^+(s)$ — функции Гельдера в окрестности точки s^* . Для $\pi < \omega < \omega_0$ $\rho^{-1/2} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ и члены для $m=2$ можно присоединить к σ_{ij}^* , т. е. опустить в явной записи (3.1).

Учитывая (2.13), (2.20), из (3.3), (3.4) получаем, что при $\omega=\pi$, ω_0 коэффициенты $K_1(\omega)$, $K_2(\omega)$ становятся неограниченными и их можно представить в виде

$$K_1(\omega)=K_1^0(\omega)+B_1(\omega)/(2 \sin \omega)$$

$$K_2(\omega)=[K_2^0(\omega)-\pi B_4(\omega)/(\sin \omega-\omega \cos \omega)] \operatorname{ctg}(\gamma_2 \pi)$$

При этом функции $K_1^0(\omega)$, $K_2^0(\omega)$ будут уже непрерывными при критических углах $\omega=\pi$, $\omega=\omega_0$ соответственно, если с изменением ω непрерывно меняется граница ∂D и заданные на ней функции g_i . Их значения при этих углах можно выразить через члены асимптотик плотностей ГИУ I или ГИУ III:

$$K_1^0(\pi)=(3\kappa-1)(\kappa+1)^{-2}A_1^{I0}(\pi, \kappa)$$

$$K_2^0(\omega_0)=-2(\kappa+1)^{-1} \sin \omega_0 A_2^0(\omega_0, \kappa)-2\pi^2(\kappa-1)[(\kappa+1)\omega_0^3 \sin \omega_0]^{-1}B_4(\omega_0)$$

$$K_1^0(\pi)=-\lim_{\omega \rightarrow \pi} \frac{A_1^{III}(\omega)+B_1(\omega)}{2 \sin \omega}-B_1(\pi), \quad K_2^0(\omega_0)=A_2^{III0}(\omega_0)$$

Выпишем асимптотику напряжения при критических углах. При $\omega=\omega_0 \approx 257,5^\circ$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}= & K_1\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\theta)\rho^{-1}+[-2(\omega^2 \sin \omega)^{-1}B_4(\omega) \ln \rho - \\ & -K_2^0(\omega)/\pi][2\theta+\sin(2\theta)/\cos \omega]-B_1(\omega)[\cos \omega \cos(2\theta)+ \\ & +1]/\sin \omega+B_2(\omega) \sin(2\theta)-B_3(\omega) \cos(2\theta)+2(\omega^2 \sin \omega)^{-1} \times \\ & \times B_4(\omega)[\theta(1-\cos(2\theta))/\cos \omega-(\omega/2) \sin \omega \sin(2\theta)]+\sigma_{\rho\rho}^*(\rho, \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}= & K_1\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta)\rho^{-1}+[-2(\omega^2 \sin \omega)^{-1}B_4(\omega) \ln \rho - \\ & -K_2^0(\omega)/\pi][2\theta-\sin(2\theta)/\cos \omega]+B_1(\omega)(\cos \omega \cos 2\theta-1)/\sin \omega - \\ & -B_2(\omega) \sin(2\theta)+B_3(\omega) \cos(2\theta)-2(\omega^2 \sin \omega)^{-1}B_4(\omega)[\theta(1- \\ & -\cos(2\theta))/\cos \omega-(\omega/2) \sin \omega \sin 2\theta]+\sigma_{\theta\theta}^*(\rho, \theta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi}= & K_1\sigma_{\phi\phi}^{(1)}(\theta)\rho^{-1}+[-2(\omega^2 \sin \omega)^{-1}B_4(\omega) \ln \rho - \\ & -K_2^0(\omega)/\pi][\cos(2\theta)/\cos \omega-1]+[B_1(\omega) \operatorname{ctg} \omega + \\ & +B_3(\omega)] \sin 2\theta+B_2(\omega) \cos 2\theta+2(\omega^2 \sin \omega)^{-1}B_4(\omega)[\theta \sin(2\theta)/\cos \omega - \\ & -(\omega/2) \sin \omega \cos 2\theta]+\sigma_{\phi\phi}^*(\rho, \theta) \end{aligned}$$

При $\omega=\pi$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}= & [(2/\pi)B_1(\pi) \ln \rho+2K_1^0(\pi)][1-\cos(2\theta)]+ \\ & +\pi^{-1}B_1(\pi)[2\theta \sin(2\theta)-1-\cos 2\theta]+B_2(\pi) \sin 2\theta- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B_3(\pi) \cos 2\theta - \pi^{-1} B_4(\pi) [2\theta - \sin(2\theta)] + \sigma_{\rho\rho}^*(\rho, \theta) \\
& \sigma_{\theta\theta} = [(2/\pi) B_1(\pi) \ln \rho + 2K_1^0(\pi)] [1 + \cos(2\theta)] - \\
& -\pi^{-1} B_1(\pi) [2\theta \sin(2\theta) - 1 - \cos(2\theta)] - B_2(\pi) \sin 2\theta + \\
& + B_3(\pi) \cos 2\theta - \pi^{-1} B_4(\pi) [2\theta + \sin(2\theta)] + \sigma_{\theta\theta}^*(\rho, \theta) \\
& \sigma_{\rho\theta} = [(2/\pi) B_1(\pi) \ln \rho + 2K_1^0(\pi)] \sin(2\theta) + \\
& + \pi^{-1} B_1(\pi) [2\theta \cos(2\theta) + \sin(2\theta)] + B_2(\pi) \cos(2\theta) + \\
& + B_3(\pi) \sin(2\theta) + \pi^{-1} B_4(\pi) [1 + \cos(2\theta)] + \sigma_{\rho\theta}^*(\rho, \theta)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Асимптотика напряжений (3.5), (3.6) при особых углах $\omega = \omega_0$, π может быть получена как непосредственно по описанной выше методике для остальных углов, так и путем предельного перехода из (3.1), (3.2) при $\omega \rightarrow \omega_0$, π с учетом (2.17), (2.22).

Из (3.5), (3.6) видно, что при $\omega = \omega_0$, π появляется логарифмическая особенность в представлении для напряжений, которая при $\omega = \pi$, т. е. в точке гладкости контура ∂D , является главной. Коэффициент при логарифме явно выражается через правые части граничных условий: для $\omega = \omega_0$ — через несамосогласованную часть заданных усилий (т. е. непроставимую вследствие условий парности напряжений через непрерывное вплоть до s^* поле напряжений, а для $\omega = \pi$ (точка гладкости границы) — через скачок касательных усилий. Отметим, что все коэффициенты в ограниченных слагаемых напряжений также явно выражаются через предельные значения заданных усилий $g_i^{\pm}(s^*)$ за исключением $K_1^0(\pi)$, $K_2^0(\omega_0)$, выражаемых через коэффициенты асимптотики плотности ГИУ. Полученные в [9] с помощью модификации методики [7] представления для напряжений около входящих углов совпадают с соответствующими членами (3.2), (3.5), (3.6) после некоторых преобразований.

Для выходящих углов ($0 < \omega < \pi$) напряжения конечны и имеют вид $\sigma_{ij}(\rho, \theta) = \sigma_{ij}^0(\theta) + \sigma_{ij}^*(\rho, \theta)$, где σ_{ij}^0 даются выражениями (3.2), а $\sigma_{ij}^*(\rho, \theta) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, если $g_i^{\pm}(s)$ — гельдеровы функции в левой и правой окрестностях точки s^* .

Отметим еще, что при численном решении коэффициенты асимптотик (2.15), (2.16), (2.21), (2.22), (3.5), (3.6) для критических углов ω_0 , π , ω_{00} могут быть получены не только путем прямой аппроксимации плотностей или напряжений около углов, содержащей логарифмические члены, но и (с учетом связи между коэффициентами критических и докритических асимптотик) по значениям коэффициентов при достаточно близких докритических углах ω .

Итак, нами получены асимптотики плотностей ГИУ и полей напряжений в окрестности углов в сжимаемой и несжимаемой упругой среде, а также в задаче Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Эта информация может быть далее использована, во-первых, для выяснения поведения решения около углов. В частности, из приведенных результатов видно, что при углах $\omega \leq \pi$ главные члены асимптотики напряжений полностью определяются поведением заданных усилий около углов и могут быть вычислены без полного решения краевой задачи. Во-вторых, эта информация необходима для уточнения численных методов решения задач с угловыми точками за счет более точной аппроксимации решения около углов, основанной на полученных в работе асимптотиках, а также для прямого вычисления коэффициентов интенсивности напряжений по коэффициентам интенсивности плотности интегрального уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов С. Е., Котов Ю. И. Интегральные уравнения плоских задач теории упругости для областей с отверстиями и углами. ЦНИИПСК. М., 1986, 73 с. — Деп. в ВИНТИ 17.09.86, № 6695—В86.
2. Эскин Г. М. Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными // Тр. Моск. мат. о-ва. 1970. Т. 21. С. 245—292.
3. Михайлов С. Е. Решение задач об антиплоской деформации упругих тел с угловыми точками методом интегральных уравнений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 981—987.
4. Мазья В. Г. К теории потенциала для системы Ламе в области с кусочно-гладкой границей // Дифференц. уравнения в частных производных и их приложения: Труды Всесоюз. симпози. в Тбилиси. 1982 г. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1986. С. 123—129.
5. Михайлов С. Е. Сингулярность напряжений в плоском наследственно упругом стареющем теле с угловыми точками // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 125—138.
6. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 479 с.
7. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526—528.
8. Moffatt H. K., Duffy B. R. Local similarity solutions and their limitations // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. Pt 2. P. 299—313.
9. Ting T. C. T. The wedge subjected to tractions: a paradox re-examined // J. Elast. 1984. V. 14. № 3. P. 235—247.

10. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1963. 367 с.
11. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
12. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
13. Заргарян С. С. Об особенностях решений системы сингулярных интегральных уравнений плоской теории упругости при заданных на границе напряжениях // Докл. АН АрмССР. 1983. Т. 77. № 4. С. 167–172.
14. Costabel M., Stephan E. Curvature terms in the asymptotic expansions for solutions of boundary integral equations on curved polygons // J. Integr. Equat. 1983. V. 5. № 4. P. 353–371.

Москва

Поступила в редакцию
5.I.1988